Marius Burtea **Georgeta Burtea**

REZOLVAREA PROBLEMELOR DIN MANUALUL DE

MATEMATICĂ M2

CLASA A XI-A

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii (TC + CD)
Filiera tehnologică, toate calificările profesionale (TC). 3 ore/săptămână.

Instrucţiuni de utilizare

Lucrarea de faţă a fost gândită pentru a veni în sprijinul elevilor în rezolvarea problemelor din manual, fiind modele de rezolvare pentru orice tip de exerciţii şi probleme pe care aceştia le pot întâlni în culegeri sau alte manuale de clasa a XI-a, ajutându-i în pregătirea pentru Olimpiadele de matematică sau examenul de Bacalaureat.

Materialul este format în esenţă din două părţi distincte:

Partea întâi, intitulată *Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare,* ce cuprinde capitolele: Matrice, Determinanţi şi Sisteme de ecuaţii liniare.

Partea a doua, intitulată *Elemente de analiză matematică*, este formată din următoarele capitole: Limite de funcţii, Funcţii continuă, Funcţii derivabile şi Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor.

Fişierul este organizat astfel:

- Partea I, intitulată *Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuaţii liniare*
  - ✓ Enunţuri
  - ✓ Rezolvări
- Partea a II-a, intitulată *Elemente de analiză matematică*
  - ✓ Enunţuri
  - ✓ Rezolvări

Am conceput Cuprinsul acestei lucrări astfel încât să se poată urmări uşor, în paralel, cele două problematici tratate: Enunţuri şi Rezolvări. În cazul în care aveţi dubii asupra unui enunţ din acest material, pentru a găsi uşor în manual problema propusă am notat în cadrul Cuprinsului şi pagina din manual unde se află aceste exerciţii şi probleme (coloana scrisă cu albastru).

Modul de utilizare a fişierului

Pentru a uşura găsirea unei anumite probleme din manual sau a rezolvarii unui anumit exerciţiu am conceput acest material într-o manieră simplă de utilizare. Astfel, dacă utilizatorul doreşte să vizualizeze setul de exerciţii de la o anumită tematică, este suficient ca, în pagina de **Cuprins** (pag.3), în coloana *Enunţuri exerciţii şi probleme propuse în manual*, să se poziţioneze deasupra capitolului sau temei care îl interesează şi să acţioneze butonul din stânga a mouseului. Automat fişierul sare la pagina corespunzătoare.

Similar se acţionează şi pentru ajungerea rapidă la pagina de rezolvări dorită, acţionând mouseul de data aceasta în coloana *Rezolvări exerciţii şi probleme*.

O dată ajuns în pagina dorită, întoarcerea la Cuprins se face prin apăsarea casetei cu săgeată aflată în partea dreaptă sus a fiecărei pagini iniţiale a fiecărei secţiuni.

Vă dorim mult succes la matematică

AURORII

CUPRINS

PARTEA I. Elemente de calcul matriceal. Sisteme de ecuaţii liniare

PARTEA a II-a. Elemente de analiză matematică

PARTEA I

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL
SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

PARTEA I.

Elemente de calcul matriceal. Sisteme de ecuaţii liniare

Capitolul 1. Matrice

1.1. Tabel de tip matriceal. Matrice, mulţimi de matrice

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 14 manual**

Exersare

E1. Să se scrie o matrice $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z})$, $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q})$, $C \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

E2. Să se scrie:

a) o matrice coloană cu 4 linii; b) o matrice linie cu 4 coloane;

c) matricea unitate de ordinul 5; d) matricea nulă de tipul (3, 4).

E3. Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -7 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \sqrt{3} \\ -2 & -5 & \frac{4}{3} \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1+i \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -i & \sqrt{5} & -7 \end{pmatrix}.$$

a) Să se precizeze tipul matricelor *A, B, C, D.*

b) Să se scrie elementele matricei *B* şi *D* precizând linia şi coloana pe care sunt aşezate. *Exemplu:* $b_{11} = 2$, $d_{13} = \sqrt{5}$, ...

c) Să se completeze:

$a_{23} = ...$, $a_{32} = ...$, $a_{22} = ...$, $c_{31} = ...$, $c_{21} = ...$, $1+i = ...$, $\sqrt{3} = ...$, $-4 = ...$,
$b_{23} = ...$, $d_{14} = ...$ şi altele.

d) Să se precizeze valoarea de adevăr a afirmaţiilor:

• $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ reprezintă diagonala principală a matricei *A*.
• diagonala secundară a matricei *A* are suma elementelor egală cu 12.
• $a_{31} + b_{22} + c_{21} - d_{14} = \sqrt{3} + 1$.
• $a_{23} \cdot b_{13}^2 \cdot c_{31}^2 \cdot d_{12} \geqslant -12$.
• $a_{23} = b_{21} = 5d_{11}$.

E4. Matricea $X = \begin{pmatrix} 3a-6 & 1-b & a^2-4 \\ b^2-b & c-\sqrt{12} & 4-\sqrt{2}m \end{pmatrix}$ reprezintă matricea nulă de tipul (2, 3). Să se determine $a, b, c, m \in \mathbb{R}$.

E5. Matricea $A = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 4-y^2 & 3u & 1-t \\ z^2+1 & v^2 & 1-x^2 \end{pmatrix}$ reprezintă matricea unitate de ordinul 3. Să se determine numerele complexe *x, y, z, t, u, v.*

E6. Să se determine elementele necunoscute astfel încât să aibă loc egalitatea:

a) $\begin{pmatrix} 2x+1 & -1 \\ 5 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+6 & -1 \\ |-5| & 4-2x+y \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} x+y & 2x-y \\ 4 & 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & y+2 \\ x+2y & 5 \end{pmatrix}$.

E7. Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_{4,\,5-n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{m^2,\,2}(\mathbb{C})$. Să se determine $m,\ n \in \mathbb{Z}$ astfel încât să fie posibilă relaţia $A = B$.

Sinteză

S1. Să se scrie matricea $A = \left(a_{ij}\right)_{4\times 4}$, ştiind că $a_{ij} = \max\{i,\ j\}$, $i,\ j = \overline{1,\ 4}$.

S2. Să se scrie matricea $B = \left(b_{ij}\right)_{3\times 3}$, ştiind că $b_{ij} = j^{i+1}$, $i,\ j = \overline{1,\ 3}$.

S3. Să se scrie matricea $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$, ştiind că $c_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{dacă } i = j \\ 1, & \text{dacă } i > j \\ (-1)^{i+j} A_j^i, & \text{dacă } i < j \end{cases}$.

S4. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & -2x & 1 \\ 5 & 6 & y^2+6 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 4x & -6 & 2 \\ 0 & -x^2 & -10 \\ -4 & 0 & 2y \end{pmatrix}$.

a) Să se scrie tr (A) şi tr (B).
b) Pentru ce valori ale lui y are loc egalitatea $a_{33} + b_{33} = a_{21} - b_{12}$?
c) Pentru ce valori ale lui x are loc egalitatea $a_{22} + 2b_{22} = a_{32} + b_{23}$?
d) Să se determine $x,\ y \in \mathbb{R}$ astfel ca $\mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B) = a_{13} + b_{31}$.

S5. Se dau matricele pătratice

$$A = \begin{pmatrix} 2^{x-1} & 0 \\ \log_2(a-1) & 4y^2 - 3x \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 3^x - 9^x & \lg\dfrac{y^2-2y}{3} \\ a+3bi-1 & 3! - C_n^2 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine $x,\ y,\ a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = I_2$.
b) Pentru ce numere $x,\ y,\ a,\ b,\ n \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $O_2 = B$?

S6. Să se determine elementele necunoscute din următoarele egalităţi de matrice:

a) $\begin{pmatrix} a^2-4 & a+b \\ 3x(1-2x) & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & -1 \\ 2x-1 & x-2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} C_{n+1}^2 & \sqrt{x^2+7} \\ \sqrt[3]{b^2} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot C_n^2 & 4 \\ 4 & \log_2 a \end{pmatrix}$.

S7. Să se determine numerele reale pozitive *x, y, z, m, p* pentru care următoarele matrice sunt egale:

$$A = \begin{pmatrix} x^2 - x & 2 \\ 3 & 2^m \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{y-3} \\ 3 & m^2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3x-4 & y-5 \\ C_{z+1}^2 & p \end{pmatrix}.$$

1.2. Operaţii cu matrice

1.2.1. Adunarea matricelor

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 24 manual**

Exersare

E1. Să se calculeze: a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -2a & b \\ 3x & -8y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -5b \\ 2x & 6y \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{5} & \frac{\sqrt{8}}{3} \end{pmatrix}$.

E2. Să se calculeze: a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} i^2 & -i^4 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

E3. Se dau matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze $A+B,\ A-B,\ {}^tA+{}^tB,\ {}^t(A+B),\ {}^t(A-B)$.

b) Să se calculeze $A+{}^tC,\ B-{}^tC,\ {}^t(A-B+{}^tC)$.

E4. Se dau matricele pătratice:

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 3z \\ 1 & u & -4 \\ -v & -2v & t+3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & z & v \\ -y & -v & x \\ -x & 2y & x-z \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine x, y, z, u, v, t astfel ca $A+B=C$.

E5. Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 4 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} - X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\sqrt{2}} & 1 \\ 2 & \frac{4}{1-\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

E6. Se dă matricea de ordinul trei, $A = \begin{pmatrix} 5 & 6-a & \sqrt{b} \\ a^2 & -1 & -10 \\ 3 & 3c+2 & n \end{pmatrix}$. Să se determine numerele reale a, b, c, n astfel ca ${}^tA = A$.

E7. Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. Să se scrie matricea A sub forma:

$$A=B+C,\ A=A_1-A_2,\ A=I_2+E,\ A=D-I_2.$$

E8. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -8\\ \sqrt{12} & 0{,}2\end{pmatrix}$; b) $-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}18 & -6 & 12\\ \frac{15}{2} & C_3^2 & 1{,}5\end{pmatrix}$; c) $\left(\sqrt{2}-1\right)\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2} & 0\\ \frac{1}{1-\sqrt{2}} & \sqrt{3+\sqrt{8}}\end{pmatrix}$; d) $i\begin{pmatrix}2i^3 & 1-i\\ -3i & 4\end{pmatrix}$.

E9. Să se determine matricea X ştiind că are loc egalitatea:

$$X=2\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}+(-1)^5\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & -5 & -4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ \frac{2}{3} & 5 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

E10. Să se determine constantele *x, y, z, a, b, c* din egalitatea:

$$2\cdot\begin{pmatrix}x & -2y & 4z\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ a & 4b & 3c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 13 & 22\\ -21 & -2 & 8\end{pmatrix}.$$

Sinteză

S1. Se dau matricele: $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2^x & -4\\ 3^y & 9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4^x & 6\\ \log_2 z & C_n^2\end{pmatrix}$.

Să se determine elementele necunoscute ştiind că ${}^tA+{}^tB=C$.

S2. Să se determine $x,\ y,\ z,\ t\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea:

$$x\cdot\begin{pmatrix}x+1 & 2\\ -1 & x\end{pmatrix}+3I_2+x\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4+y\\ z+2 & t+4\end{pmatrix}.$$

S3. Să se determine matricea A în fiecare caz:

a) $2A+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; b) $3A+5\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 9\end{pmatrix}$;

c) $-4\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 0 & 4\\ 12 & -1\end{pmatrix}+7A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 1 & -2\\ 5 & 6\end{pmatrix}-\frac{4}{3}\begin{pmatrix}0 & 1{,}5\\ 6 & 0\\ 3 & 12\end{pmatrix}$.

S4. Să se determine matricele *A, B* ştiind că:

a) $A+2B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ şi $2A-B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

b) $(1+i)A+B=\begin{pmatrix}2+i & 1\\ 1 & 2+i\end{pmatrix}$ şi $A+(1-i)B=\begin{pmatrix}2-i & 1-i\\ 1-i & 2-i\end{pmatrix}$.

S5. Să se calculeze matricea:

a) $A=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & k\\ k^3 & k(k+1)\end{pmatrix}$; b) $A=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & 2^k\cdot 3^{k+1}\\ 2^k & 2^k\cdot 3^{-k}\end{pmatrix}$.

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 32 manual

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cos 0 \\ 2 & -1 & \sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

E2. Pentru fiecare pereche de matrice (A, B) să se determine $AB, BA, {}^tA\,{}^tB, {}^tB\,{}^tA$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & \operatorname{tg}0 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

E3. Pentru matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ să se verifice egalitatea ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA.$ şi să se calculeze $AB + {}^tB \cdot {}^tA$.

E4. Se dau matricele pătratice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Să se verifice egalităţile matriceale:

a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$; b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

c) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

E5. Să se calculeze următoarele puteri de matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^3; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^5; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^2.$$

E6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^2, A^3, A^{2006} şi $(A^3 + I)^{10}$.

E7. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Folosind metoda inducţiei matematice să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

E8. Să se determine $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea matriceală:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

E9. Se dă matricea $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $f(X) = X^3 - 4X + 2I_2$. Să se determine matricele:

a) $B = 2f(A) - f(A + I_2)$; b) $C = f(A) + 2f(A - {}^tA)$.

Sinteză

S1. Să se determine matricea X care verifică egalitatea:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

S2. Se dau matricele pătratice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţiile matriceale:

a) $AX = I_2$; b) $AX = B$; c) $XA = B$; d) $AX = XB$; e) $BXB = A$.

S3. Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, care verifică egalitatea $A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

S4. Să se rezolve ecuaţia matriceală: $2A - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + I_2$.

S5. Există matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$?

S6. Să dă matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Să se determine numerele $x,\ y \in \mathbb{R}$ astfel încât să fie verificată egalitatea $A^3 = xA^2 - yA$.

Facultatea de Inginerie economică Tg. Mureş, 2002

S7. Să se determine puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Facultatea de inginerie Sibiu, 2002

S8. Să se determine puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Universitatea Politehnică Timişoara, 2002

S9. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-2x & x \\ -6x & 1+3x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y+xy),\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$.
b) Să se verifice egalităţile:
$A^2(x) = A\big((x+1)^2 - 1\big),\ A^3(x) = A\big((x+1)^3 - 1\big)$.
c) Să se calculeze $A^{2006}(1)$.

S10. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A = I_3 + B$ şi să se calculeze $A^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se calculeze suma $S = A + A^2 + A^3 + ... + A^{20}$.

S11. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea $C(k) = A \cdot B \cdot {}^t A$.
b) Să se calculeze suma de matrice $S = C(1) + C(2) + ... + C(20)$.

pag. 32 manual

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\alpha = 2a_{13} + 3a_{23}$. Dacă $\alpha = 5$, atunci:

a) $x = 1$; b) $x = -2{,}5$; c) $x \in \{0, 1\}$; d) $x \in \left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$.

2. Să se determine numerele reale *x, y* cu proprietatea că

$$x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix} + 3y\begin{pmatrix} y & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $B = A^{10} + A^9$.

a) Să se calculeze $\mathrm{Tr}(B)$ şi $b_{31} + b_{22} + b_{13}$;
b) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$

Testul 2

1. Se consideră mulţimea de matrice $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & (-1)^x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 \in M$.
b) Să se arate că dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.
c) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in M$.

2. Să se determine numerele $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ pentru care:

$$\begin{pmatrix} 2^x + 4^x & 3^y + 9^y \\ C_z^2 & 5A_{t+1}^2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

3. Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ştiind că: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A + {}^tA\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

Să se arate că matricea $(AB - BA)^2$ are cel puţin două elemente nule.

Capitolul 2. Determinanţi

2.1. Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult trei

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 52 manual

Exersare

E1. Să se calculeze următorii determinanţi de ordinul doi:

a) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -6 \\ -3 & \sqrt{32} \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1{,}5 & -7{,}2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2+i & -1 \\ i^2 & 2-i \end{vmatrix}$.

E2. Să se calculeze, scriind sub forma cea mai simplă, determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} \frac{7}{5} & \frac{8}{3} \\ 9 & 25 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{32} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{75} \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1-\sqrt{3} & \sqrt{5}-1 \\ 1+\sqrt{5} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \log 100 & 0{,}5 \\ -8 & \lg 0{,}1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 3! & 5! \\ 0! & 4! \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} A_4^2 & A_3^3 \\ C_5^1 & C_4^3 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 2^{x+1} & 3^{2y} \\ 9^{-y+1} & 2^{-x} \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} (1-i)^2 & -i \\ i & (1+i)^2 \end{vmatrix}$.

E3. Să dau matricele pătratice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. Comparaţi numerele:

a) $\det(A) + \det(B)$ şi $\det(A+B)$.
b) $\det(AB)$ şi $\det(A) \cdot \det(B)$;
c) $\det\left[\sqrt{3}(A - I_2)\right]$ şi $\det(A + 2I_2)$.

E4. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix} x & -3x \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 20$; b) $\begin{vmatrix} -5 & 3x-1 \\ 2 & -x \end{vmatrix} = 10$; c) $\begin{vmatrix} 3x^2 & x+1 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 4$;

d) $\begin{vmatrix} 3-x & 4x-1 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = x-5$; e) $\begin{vmatrix} x-i & i \\ 2x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x \\ i & 3 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 3^x & x \\ 1 & 2^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^x & -1 \\ -x & 18^x \end{vmatrix}$.

E5. Să se calculeze determinanţii de ordinul al treilea prin cele trei reguli de calcul:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! \\ 1! & 2! & 0! \\ 2! & 0! & 1! \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 40 \\ -1 & -5 & -7 \\ 100 & 200 & 400 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 11 & 21 & 47 \\ -1 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 3 & 7 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

E6. Enunţaţi câte o proprietate a determinanţilor şi daţi un exemplu de aplicare a acesteia.

E7. Folosind proprietăţile determinanţilor să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} 300 & 400 & 500 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 50 & 1 & 1 \\ 100 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 5 & 11 & -1 \\ 15 & 22 & -3 \\ 25 & 44 & -5 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 1 & b & n \\ 1 & c & p \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

E8. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} 8 & -9 & 10 \\ 4 & 6 & -3 \\ 12 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

a) Să se determine complemenţii algebrici ai elementelor determinantului d.
b) Să se calculeze d folosind dezvoltarea după coloana a doua şi apoi după linia a treia.
c) Folosind proprietăţile determinanţilor, să se formeze două zerouri pe coloana întâi, apoi să se calculeze determinantul obţinut folosind dezvoltarea deter- minantului după coloana întâi.

Sinteză

S1. Să se calculeze valoarea expresiei: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 8 & -25 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot |-5|$.

S2. Să se verifice dacă următoarea egalitate este adevărată:

$$20\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{4}{5} \\ \frac{6}{3} & \frac{7}{10} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sqrt{5}-2 & 4-\sqrt{17} \\ 4+\sqrt{17} & -\sqrt{5}-2 \end{vmatrix} + \frac{5}{3}\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

S3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix} x(x+2) & x+3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -14$; b) $\begin{vmatrix} x^2+x & x-2 \\ 3x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & 3+i \\ 3-i & -i \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} x(x-1) & 4-x \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5x & 2 \\ x+1 & x \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3^{x+2} & 9 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3^x \\ 1 & 3^{x+1} \end{vmatrix}$.

S4. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ -1 & x & -1 \\ x & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+i)^2 & 1 \\ -2 & i \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2 & 1 \\ 3x+2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ 2x & 2x-1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

S5. Se consideră ecuaţia $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ x-1 & x & -3 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei, să se calculeze $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

S6. Folosind proprietăţile determinanţilor, să se calculeze următorii determinanţi scriind rezultatul sub formă de produs:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & a+1 \\ b & b^2+1 & b+1 \\ c & c^2+1 & c+1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 & a^2-1 \\ b+1 & b-1 & b^2-1 \\ c+1 & c-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$.

S7. Să se verifice egalităţile:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$;

b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x-y)(y-z)(z-x)$.

S8. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că are loc egalitatea $A^2 - tr(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2 = O_2$ (relaţia lui Hamilton-Cayley).

S9. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $d = \det(A)$ şi $t = \mathrm{tr}(A)$.
b) Să se calculeze $s = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}$, unde δ_{ii} reprezintă complementul algebric al elementului a_{ii} din matricea A, $i = 1, 2, 3$.
c) Cât este suma $s_1 = a_{13}\delta_{12} + a_{23}\delta_{22} + a_{33}\delta_{32}$?
d) Să se verifice egalitatea matriceală $A^3 - tA^2 + sA - d\cdot I_3 = O_3$.

S10. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, unde $b_{ij} = i$, dacă $i = j$ şi $b_{ij} = i - j$, dacă $i \neq j$.

a) Să se determine $\det(A)$, $\det(B)$ şi $\det(A\cdot B)$.
b) Să se verifice dacă are loc egalitatea $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
c) Cât este suma $s = b_{11}\delta_{31} + b_{12}\delta_{32} + b_{13}\delta_{33}$?

Cărei proprietăţi a determinanţilor corespunde rezultatul?

S11. Aplicând proprietăţile determinanţilor, să se arate că următorii determinanţi sunt nuli:

a) $\begin{vmatrix} a+b & \sqrt{3} & c \\ b+c & \sqrt{3} & a \\ c+a & \sqrt{3} & b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a-b & 2 & a-b \\ a^2+b^2 & a-b & -2ab \\ -2ab & a-b & a^2+b^2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & b+c-a \\ b^2 & (a+c)^2 & a+c-b \\ c^2 & (a+b)^2 & a+b-c \end{vmatrix}$.

2.2. Aplicaţii ale determinanţilor în geometrie

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 62 manual

Exersare

E1. Se dau punctele $A(2,-4)$ şi $B(-1, 3)$. Să se scrie ecuaţia dreptei AB şi să se verifice dacă punctul $C(5,-11)$ este coliniar cu punctele A, B.

E2. Care din următoarele triplete de puncte sunt formate din puncte coliniare:

a) $A(-1,-9)$; $B(2,-3)$; $C(4, 1)$. b) $M(2,-3)$; $N(1,-1)$; $P(1, 5)$.

c) $E(-4,-2)$; $F(2, 1)$; $G(6, 3)$. d) $T(2,-1)$; $U(3, 1)$; $V(m, 2m-5)$.

E3. Se dau punctele $A(2,-3)$, $B(m+1, 2m)$, $C(1, 5)$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei AC.

b) Pentru ce valori ale parametrului m, punctele A, B, C sunt coliniare.

c) Să se determine triunghiul ABC cu aria 22,5.

E4. Se dau punctele $A(-3,-2)$, $B(5,-4)$, $C(-1,-3)$.

a) Să se scrie ecuaţiile laturilor triunghiului ABC.

b) Să se determine lungimile înălţimilor triunghiului ABC.

c) Să se determine $\mathcal{A}_{(ABC)}$.

E5. Patrulaterul $ABCD$ are vârfurile $A(1, 2)$, $B(8, 2)$, $C(6, 4)$, $D(3, 4)$.

a) Să se scrie ecuaţiile laturilor patrulaterului.

b) Să se scrie ecuaţiile diagonalelor patrulaterului.

c) Să se compare distanţele punctelor A şi C la diagonala $[BD]$.

d) Să se calculeze aria suprafeţei ($ABCD$).

Sinteză

S1. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, 4)$ şi $D(3, 5)$.

a) Să se reprezinte punctele în plan şi să se scrie ecuaţiile dreptelor AB, BC, CA, CD.

b) Să se determine distanţele de la vârfurile B şi D la dreapta AC.

c) Să se compare ariile suprafeţelor (ABD), (BCD) şi (COD).

d) Dacă punctul $M(m, m+2)$ este coliniar cu B şi C, calculaţi aria suprafeţei (MAD).

S2. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(1, 1)$, $B(2^x, 2^{x+1}-2)$, $C(2^{x+1}-2, 2^x)$ să fie coliniare.

S3. Se dau punctele $A(\sin^2 a, \cos^2 a)$, $B(\sin^2 b, \cos^2 b)$, $C(\sin^2 c, \cos^2 c)$.

a) Să se verifice dacă $\mathcal{A}_{(OAB)} = \frac{1}{2}\left|\sin(a-b)\cdot\sin(a+b)\right|$.

b) Să se arate că pentru oricare $a, b, c \in \mathbb{R}$, punctele A, B, C sunt pe o dreaptă.

S4. Se dau punctele distincte $A(2, m)$, $B(m+1, m)$, $C(1, 2)$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele să fie coliniare.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca aria suprafeței (ABC) să fie 1.

S5. Se consideră punctele $A(m, 2m-1)$, $B(m+1, -m+2)$. Pentru ce valori ale lui m are loc egalitatea $\mathscr{A}_{(OAB)} = \dfrac{23}{2}$.

S6. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel ca punctele A, B, C să fie coliniare în cazurile:

a) $A(m-1, 3)$, $B(2m, -m)$, $C(2m-3, 1+m)$.

b) $A(m-n, 1+m)$, $B(2m-n, 1)$, $C(m, n+1)$.

S7. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca punctul $A(1, 1)$ să fie la distanța 3 față de dreapta BC, unde $B\left(0, \dfrac{2-6m}{1-m}\right)$, $C\left(1, \dfrac{7m-1}{m-1}\right)$.

S8. Se consideră punctele $A(3, 2)$, $B(2, 4)$. Să se determine punctele M situate pe dreapta $x-y-3=0$ pentru care $\mathscr{A}_{(OAM)} = \mathscr{A}_{(OBM)}$.

S9. Există puncte $A(m, 1)$, $B(1, m)$, $C(m, m)$ astfel încât $\mathscr{A}_{(ABC)} = 2$?

pag. 64 manual

Teste de evaluare

Testul 1

1. Se dă expresia $E = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)^3 \cdot |-6|^2$.

Valoarea expresiei este: a) –2; b) 2; c) 20; d) –36.

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\det(A)$ utilizând:

a) regula lui Sarrus;
b) regula triunghiului;
c) dezvoltarea după linia a doua;
d) dezvoltarea după coloana a doua;
e) dezvoltarea după coloana întâi după ce s-au obținut două zerouri pe aceasta.
f) o proprietate a determinanților nuli.

3. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2x+1 \\ 5 & x-1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Suma soluțiilor ecuației $\det(A+B) = \det(C^2)$ este ... .

4. Punctele $A(2m+1, 3)$, $B(1, m)$ și $C(-4, 2)$ sunt coliniare dacă $m = \ldots$.

Testul 2

1. Fie S_1, respectiv S_2 mulţimile soluţiilor ecuaţiilor:

a) $\begin{vmatrix} x-4 & 1-3x \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1,(6) \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} y+4 & -y-5 & y+1 \\ 1 & y-1 & 3 \\ y+2 & -1 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y+1 & -1 \\ 1 & 2y \end{vmatrix}$.

Să se determine S_1, S_2, $S_1 \cup S_2$, $S_1 \times S_2$.

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & \varepsilon^2 \\ -\varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$, unde ε este soluţie a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Atunci $\det(A) + \det\left(\frac{1}{2}A^2\right) = \ldots$.

3. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} x & y & b \\ a & 0 & z \\ -c & -z & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 & b \\ a & y & z \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ a & y & 0 \\ -c & b & -z \end{pmatrix}$ şi $n = x\det(A) + a\det(B) + c\det(C)$. Atunci $n = \ldots$.

4. Se consideră triunghiul ABC, cu $A\left(-\frac{2m}{3}, 1\right)$ $B\left(3-m, -\frac{1}{4}\right)$ şi $C(1, 2)$. Valoarea lui $m \in \mathbb{Z}$ pentru care $d(C, AB) = 3$ este ... .

Capitolul 3. Sisteme de ecuaţii liniare

3.1. Matrice inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 70 manual**

Exersare

E1. Să se determine care din următoarele matrice sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

E2. Să se determine inversa matricei:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

E3. Să se determine $m \in \mathbb{C}$ pentru care matricea este inversabilă:

a) $\begin{pmatrix} 2 & m \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} m & 5 \\ -20 & m \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} m-3 & 7 \\ 2 & m+2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} m^2-3m & m \\ m-3 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} m & m+1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} m^2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ m^2 & 11 & 9 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 2+m & 1 & 1 \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} \frac{3m+1}{2} & -1 & 7 \\ 4 & 9 & \frac{m-7}{2} \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

E4. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că matricele A, B, AB şi BA sunt inversabile şi să se calculeze inversele lor.

b) Este adevărată egalitatea $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$?

c) Să se verifice egalităţile $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ şi $(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$.

E5. Să se determine matricea A a cărei inversă este:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

S1. Care din următoarele matrice sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix} 2^x & 5^x \\ 4^x & 10^x \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \lg 1 & 2 \\ -2 & \lg 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0! & 3 \\ 8 & 4! \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} C_4^2 & A_3^2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$?

S2. Să se determine inversa matricei:

a) $\begin{pmatrix} i & -i^2 \\ 3 & -4i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{3} & 1-i \\ 1+i & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -1 & C_m^2 & C_m^1 \\ 4 & -3 & 5 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

S3. Să se determine valorile parametrului real m pentru care matricea A este inversabilă, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & -1 & x \\ m & x & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & x & -1 \\ m & 2 & x \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ m & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

S4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^* = A^{-1}$ dacă:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & m+3 & 1 \\ -3 & m-4 & -3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} m-3 & m & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 & 4 \\ m & -1 & 1 \\ 3m-2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 4^m & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2^m & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

S5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \{1, 2, 3\}$, două matrice inversabile astfel încât $AB = BA$. Să se arate că:

a) $AB^{-1} = B^{-1}A$; b) $A^{-1}B = BA^{-1}$; c) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

S6. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine produsul $(I_3 - A)(I_3 + A)$.

b) Să se arate că $I_3 - A$ este matrice inversabilă şi să se calculeze $(I_3 - A)^{-1}$.

3.2. Ecuaţii matriceale

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 74 manual**

Exersare

E1. Să se rezolve ecuaţiile matriceale:

a) $X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; b) $X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3i & 1\\ -5 & 2i\end{pmatrix}X$.

E2. Să se rezolve ecuaţia matriceală:

a) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot Y\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & -5\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}-3I_2$.

E3. Să se determine matricea necunoscută din egalităţile:

a) $\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 3 & -4 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$; b) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

E4. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Să se determine matricea X care verifică relaţia:

a) $AXB=C$; b) $BXA={}^tC$.

3.3. Sisteme de ecuaţii liniare cu cel mult trei necunoscute. Forma matriceală

Enunţuri Exerciţii şi probleme **pag. 90 manual**

Exersare

E1. Să se scrie matricele asociate următoarelor sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 3x+5y=7 \\ 8x-y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=1 \\ 5x-6y=-8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 4x+y+3z=0 \\ 9x-2y-z=4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} a+b-c=6 \\ 3a-2b+c=11 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 3x+2y-z=-x+y+1 \\ x-y+3z=ix-2 \\ ix-iy+z=2(x-1) \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3(x-1)+4(2-y)=3(z-2) \\ 2(1+x)+3(z-y)=5(x-y) \\ 3(x-y)+4(y-z)=2(x+y-z) \end{cases}$.

E2. Care din sistemele de numere $(-3,-2)$; $(-2,-4)$; $(-6,2)$; $(i,1)$ sunt soluţii ale sistemelor de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 2x+y=-8 \\ 3x-4y=10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=-4 \\ 2x+5y=-2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (2-i)x-4y=-3+2i \\ 2ix+iy=-2+i \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3(x-i)+i(y-1)=0 \\ (1+i)(x+1)+(1-i)(y+1)=2 \end{cases}$.

E3. Se dă sistemul de ecuaţii $\begin{cases} (a+3)x-3y=8 \\ 4x-(2b+3)y=18 \end{cases}$, $a, b\in\mathbb{R}$. Să se determine a şi b astfel încât soluţia sistemului să fie:

a) $(1,-2)$; b) $\left(-\frac{7}{4},-5\right)$.

E4. Să se scrie sub formă matriceală şi să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 5x-7y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3(x+y)-2(x+2y)=5 \\ 4(x-y)-y+2x=2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x+y-3z=-6 \\ 4x+y+z=10 \\ -3x+y+2z=-1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2(3x-y)+5z=3+y \\ 4(x+y-z)+2y=3+z \\ 2x-3y+10z=2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+y+z=a \\ 2x+5y-3z=b \\ x+3y-2z=c \end{cases}$.

E5. Să se determine care din următoarele sisteme sunt de tip Cramer şi să se rezolve prin regula lui Cramer:

a) $\begin{cases} x-8y=5 \\ 3x+9y=11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2(x-y)-3(x+y)=1 \\ 8x-5(x-3y)=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x-4y+2z=3 \\ 5x+y+3z=6 \\ x-6y+z=-4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-2y+2z=10 \\ 2x-y-z=2 \\ x+y-z=4 \end{cases}$.

E6. Să se rezolve sistemele de ecuaţii prin regula lui Cramer:

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -2x+5y=-1 \\ 3x-7y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x+3y=17 \\ 6x+5y=-3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+3z=4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+2y-4z=-2 \\ -3x+4y+z=13 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases}$; f) $\begin{cases} -2x+y+3z=-1 \\ x+y+2(y+z)=4 \\ 2(x+z)-(3y+x)=10 \end{cases}$.

E7. Se consideră sistemul de ecuaţii $A \cdot X = B$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Să se rezolve sistemul de ecuaţii prin metoda matriceală.
b) Să se scrie ecuaţiile sistemului.
c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii prin regula lui Cramer.

E8. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=-1 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x+5y+3z=17 \\ 4x-6y-3z=0 \\ 6x+10y-10z=8 \\ x+y+z=6 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x+y-2z=1 \\ 2x+3y-2z=4 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+2y-z=2 \\ 2x+3y+z=6 \\ 3x+4y+3z=10 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x-10y+8z=-1 \\ 4x-15y+9z=0 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x-3y-z=1 \\ x-y-2z=-3 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} a-2b+c=10 \\ 3a-2b-c=7 \end{cases}$; j) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$.

Sinteză

S1. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie de tip Cramer şi să se rezolve în acest caz:

a) $\begin{cases} x-my+z=2m \\ x-2y+z=-1 \\ mx+m^2y-2z=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+my-z=8 \\ 2x-y-2z=6 \\ mx+2y+z=4 \end{cases}$.

S2. Pentru ce valori ale parametrului m sistemul de ecuaţii nu este de tip Cramer?

a) $\begin{cases} x+(m+1)y+z=2 \\ mx+y-z=0 \\ x-2y-mz=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+3y+(m+2)z=0 \\ 3x+y+mz=4 \\ 3x-y+z=6 \end{cases}$.

S3. Să se rezolve prin metoda matriceală, metoda lui Cramer şi metoda lui Gauss sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} \frac{1}{4}(5x-2y)+1=x-\frac{1}{5}(y+2) \\ \frac{1}{7}(5x+3y)+\frac{1}{14}(9y-11)=x+y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+3y=\frac{7}{9}(5x+12z) \\ 9y+20z=6(x-48y) \\ 2x+3y+4z=128 \end{cases}$.

S4. Să se rezolve prin regula lui Cramer sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x+y-(2-i)z=-2+2i \\ x+iy-(1+i)z=-1 \\ ix-iz=-1-i \end{cases}$; b) $\begin{cases} C_3^1x-C_3^2y+4C_3^3z=2 \\ 2C_5^1x-4C_5^0y+C_5^2z=6 \\ A_3^2x-2A_3^1y+A_3^3z=0 \end{cases}$.

S5. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 2(x+2y)=3z+11 \\ 5x-3y=6-5z-2x \\ 3(x-z)=15-y+5z \\ 6(x-y)+11z=-4-y \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=2-z \\ x+3y=5-z \\ x+y=-7-5z \\ 2x+3y=14+3z \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=3z-1 \\ 2x+y=2z+1 \\ x+y+z-3=0 \\ x+2y-3z-1=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x+4z=-2(2+y) \\ 5y+7z=4(x+2) \\ 11x-31y-47z=-68 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x+7y-4z=0 \\ 5x-2y-8z=0 \\ 12x+3y-20z=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x-4y+(2m+3)z=0 \\ x-my-z=0 \\ 2x+y=8,\ m\in\mathbb{R} \end{cases}$.

S6. Se dă sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+y+(m+1)z=m \\ x+(m-1)y+mz=2m \\ 5x+4y+3(m+1)z=3 \end{cases}$.

a) Pentru ce valori ale parametrului $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil determinat?
b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii obţinut pentru $m=0$, $m=-1$, $m=2$.

S7. Se dă sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=4 \end{cases}$. Ştiind că a, b, c sunt numere reale diferite, să se rezolve sistemul.

S8. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} (2m-1)x+3y-mz=1 \\ 3x+(2m-1)y+(m-1)=3 \\ (m-2)x+(m-2)y+z=2 \end{cases}$.

a) Să se scrie matricea A a sistemului şi să se rezolve ecuaţia $\det(A)=0$.
b) Pentru ce valori ale parametrului m sistemul nu este de tip Cramer?
c) Dacă sistemul este de tip Cramer să se determine soluţia sistemului notată (x_m, y_m, z_m).
d) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc relaţia $x_m+2y_m-z_m>1$.

S9. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=2^{\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R} \\ x+y+2z=4^{\alpha} \end{cases}$.

a) Să se determine soluţia $(x(a), y(a), z(a))$ a sistemului de ecuaţii.
b) Să se determine mulţimea $A=\{a\in\mathbb{R} \mid y(a)>1\}$.

ASE Bucureşti, 1998

S10. Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ (\alpha+1)x+(\beta+1)y+2z=7, \\ x+2\beta y+z=4 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ este compatibil determinat pentru:

a) $\alpha=1, \beta \neq 0$; b) $\alpha \neq 1, \beta \neq 0$; c) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; d) $\alpha=1, \beta=\frac{1}{2}$.

Universitatea Galaţi, 2004

S11. Să se discute după $m \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x+2y+mz=m \end{cases}$.

S12. Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+my+2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ are numai soluţia nulă (0, 0, 0) dacă:

a) $m \neq -1, m \neq 2$; b) $m=0$; c) $m=2$; d) $m \in \mathbb{R}$.

Politehnică Bucureşti, 2004

S13. Pentru golirea unui bazin cu apă se utilizează trei robinete. Timpul de funcţionare a fiecărui robinet şi cantitatea de apă evacuată exprimată în hectolitri sunt date în tabelul matriceal alăturat.

Tabelul 3.3.

Robinetul I (nr. de ore)	Robinetul II (nr. de ore)	Robinetul III (nr. de ore)	Cantitatea de apă evacuată (în hl)
2 ore	3 ore	6 ore	220 hl
3 ore	2 ore	6 ore	210 hl
2 ore	2 ore	3 ore	145 hl

Să se determine debitul fiecărui robinet.

S14. Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală a fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani cei doi copii vor avea împreună cât vârsta tatălui lor.

S15. Se consideră sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x+my-2z=2 \\ 2x+(2m-1)y+z=n, \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$ $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve sistemul pentru $m=1$ şi $n=5$.
b) Să se discute după valorile lui $m, n \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve sistemul.

Universitatea Braşov, 2002

pag. 96 manual

Teste de evaluare

Testul 1

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3-x & x \\ x+6 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3 \in (\mathbb{R})$.

a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel ca matricea A să nu fie inversabilă.

b) Să se calculeze A^{-1} dacă $x = 2$.

2. Fie sistemul de ecuații: $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2mx + m^2 y + 3z = 3m \end{cases}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.

b) Să se rezolve sistemul obţinut dacă $m = 3$.

Universitatea Construcţii Bucureşti, 2004

3. Pentru 3 creioane, o gumă şi 7 caiete un elev plăteşte 45 lei. Dacă ar cumpăra 5 creioane, 3 gume şi două caiete ar plăti 28 lei. Ştiind că 4 creioane, 5 gume şi 5 caiete costă împreună 42 lei, să se afle preţul fiecărui obiect.

Testul 2

1. Să se calculeze inversele matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Se dau matricele $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, unde $a_{ij} = \begin{cases} C_{2i}^{i},\ i > j \\ i, \quad i = j \\ -i, \quad i < j \end{cases}$ şi $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 45 \end{pmatrix}$

Să se rezolve ecuaţia matriceală $AX = B$.

3. Se dă sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} (1+m)x + y + z = 1 \\ x + (1+m)y + z = m \\ x + y + (1+m)z = m^2 \end{cases}$, $m^2 \in \mathbb{R}$

a) Să se calculeze determinantul sistemului.

b) Pentru ce valori ale lui m sistemul este compatibil determinat?

c) Să se rezolve sistemul pentru $m = 2$.

d) Să se rezolve sistemul pentru $m = 0$.

Universitatea Baia Mare, 2005

pag. 97 manual

Probleme recapitulative

1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se determine $a,\ b\in\mathbb{R}$ pentru care $A^3+aA^2+bA=O_2$.

2. Să se determine matricea $A=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ştiind că $A^2+4I_2=4A$, şi apoi să se afle A^n, $n\geqslant 1$.

Ştiinţe economice Cluj, 1996

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2 şi A^3.

b) Să se determine $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $A^3=\alpha A^2+\beta A+I_3$.

Universitatea Bacău, 1997

4. Fie $E(X)=X^2-4X+4I_3$. Dacă $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $E(A)=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Universitatea Craiova, 2003

5. Fie $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Să se calculeze $(I_3+A)^n$, $n\geqslant 1$.

Universitatea Politehnică, 1994

6. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze $S=A+A^2+A^3+...+A^{10}$.

7. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & c & 0\\ d & 0 & e\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $ae=bd$.

a) Să se demonstreze că există $x,\ y\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=xA+yE$, unde $E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

b) Să se arate că pentru oricare $n\geqslant 1$, există $a_n,\ b_n\in\mathbb{R}$, cu proprietatea că $A^n=x_nA+y_nE$.

Facultatea de Sociologie, 1997

8. Fie $A=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$. Dacă $C=AB$, să se calculeze C^{101}.

9. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases}A+B=I_2\\ 2A+3B=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$; b) $\begin{cases}A+3B=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\\ 3A+4B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\end{cases}$.

10. Să se determine matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ştiind că

$$A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\a & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\a & 1\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{pmatrix}.$$

11. Să se determine $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ştiind că:

$$A\cdot\begin{pmatrix}1 & i\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & i\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 4i\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

12. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix}x & x & 1\\1 & x & 1\\4 & -5 & 4\end{vmatrix}=0$; b) $\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\-1 & x & 1\\1 & -2 & x\end{vmatrix}=5$; c) $\begin{vmatrix}x & 1 & 1\\1 & x & 1\\1 & 1 & x^2\end{vmatrix}=0$.

13. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\begin{vmatrix}1 & x & ab\\1 & a & bx\\1 & b & ax\end{vmatrix}=0$, dacă $a\neq b$. b) $\begin{vmatrix}2x+1 & x+1 & x+2\\2x+7 & x+4 & x+5\\2x+13 & x+7 & x+8\end{vmatrix}=0$;

c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a+b & x+b & x+a\\x^2 & a^2 & b^2\end{vmatrix}=0$, dacă $a\neq b$.

14. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru ca matricea A să fie inversabilă:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & a+1 & 1\\1 & 1 & a^2+1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1\\1 & 1+a^2 & 1\\1 & 1 & 1+a^3\end{pmatrix}$.

15. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$; b) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\2 & 1 & -1\\-3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

Universitatea Bacău, 1998

16. Fie $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} x+m & m \\ 1-m & x+2m \end{pmatrix}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

17. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Să se calculeze inversa matricei A^4.

18. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze B^{-1}.

19. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+3y-z=3 \\ 2x+y-4z=-1 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-3z=1 \\ 4x+y-5z=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+2z=3 \\ 3x+y+4z=1 \\ x-y+3z=1 \end{cases}$.

20. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ mx+y-2z=1 \\ (2m-1)x+2y+z=n \end{cases}$. Dacă

$A = \left\{(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, \text{sistemul este compatibil nedeterminat}\right\}$ şi

$\alpha = \sum\limits_{(m,n)\in A} (m^2+n^2)$, atunci:

a) $\alpha = 18$; b) $\alpha = 26$; c) $\alpha = 32$; d) $\alpha = 13$; e) $\alpha = 25$.

21. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-my+z=0 \\ x-2y+z=m-2 \\ mx+m^2y-z=2m^2 \\ 2mx+(m+1)z=2m^2 \end{cases}$.

Dacă $A = \left\{m \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{sistemul este incompatibil}\right\}$, atunci:

a) $A = \{-1, 0, 2\}$; b) $A = \{0, 2\}$; c) $A = \varnothing$;
d) $A = \{-1, 0\}$; e) $A = \{-1, 2\}$.

ASE Bucureşti, 2003

REZOLVĂRI

Partea I. Elemente de calcul matriceal. Sisteme de ecuații liniare

Capitolul I. Matrice

1.1. Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice

Exersare

E1. *Rezolvare:*

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\\4&-5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&-7\\\frac{3}{2}&\frac{5}{4}\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\2&5&\sqrt{2}&0\\\frac{4}{3}&9&-\frac{1}{2}&\sqrt{3}\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}2+i&1&-5\\4&3i&\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

E2. *Rezolvare:*

a) $A=\begin{pmatrix}2\\-1\\\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$; b) $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&4&1+i&\sqrt{\frac{2}{5}}\end{pmatrix}$; c) $C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$; d) $D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

E3. *Rezolvare:*

a) $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$; $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$; $C\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$; $D\in\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{C})$;

b) $b_{11}=2$; $b_{12}=-3$, $b_{13}=\sqrt{3}$; $b_{21}=-2$; $b_{22}=-5$; $b_{23}=\frac{4}{3}$; $d_{11}=\frac{2}{5}$; $d_{12}=-i$; $d_{13}=\sqrt{5}$; $d_{14}=-7$.

c) $a_{23}=-2$; $a_{32}=-4$; $a_{22}=8$; $c_{31}=1+i$; $c_{21}=-1$; $1+i=c_{31}$;

$\sqrt{3}=b_{13}$; $-4=a_{32}$; $b_{23}=\frac{4}{3}$; $d_{14}=-7$.

d) • Suma $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ reprezintă urma matricei A şi nu diagonala principală.

• Suma elementelor diagonalei secundare a matricei A este 12.

• $a_{31}+b_{22}+c_{21}-d_{14}=0+(-5)+(-1)-(-7)=1\neq\sqrt{3}+1$.

• $a_{23}\cdot b_{13}^2\cdot c_{31}^2\cdot d_{12}=-2\cdot(\sqrt{3})^2\cdot(1+i)^2\cdot(-i)=-2\cdot3\cdot2i\cdot(-i)=-12\geqslant-12$.

• $a_{23}=b_{21}=-2$ şi $5d_{11}=2$. Aşadar $-2\neq2$ şi $a_{23}=b_{21}\neq5d_{11}$.

E4. *Rezolvare:*

Se egalează fiecare elemente cu zero şi se obține:

• $3a-6=0$ şi $a^2-4=0$. Se obține $a=2$.

• $1-b=0$ şi $b^2-b=0$. Se obține $b=1$.

• $c-\sqrt{12}=0$, cu soluția $c=2\sqrt{3}$.

• $4-\sqrt{2}m=0$, cu soluția $m=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

E5. *Rezolvare:*

Se pune condiția ca să aibă loc egalitatea de matrice $A=I_3$. Se obțin succesiv egalitățile: $x+1=1$; $4-y^2=0$; $3u=1$; $1-t=0$; $z^2+1=0$; $v^2=0$; $1-x^2=1$. Rezolvând ecuațiile se obține: $x=0$, $y\in\{-2,2\}$, $u=\frac{1}{3}$; $t=1$; $z\in\{-i,i\}$, $v=0$.

E6. *Rezolvare:*
Se aplică egalitatea a două matrice. Se obțin următoarele egalități:
a) $2x + 1 = -y + 6$ şi $x - y = 4 - 2x + y$.

Avem sistemul de ecuații: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ cu soluția $x = 2$, $y = 1$.

b) $x + y = 3$; $2x - y = y + 2$; $4 = x + 2y$; $2x + y = 5$.
Se obține soluția $x = 2$, $y = 1$.

E7. *Rezolvare:*
Se pune condiția ca matricele să fie de acelaşi tip. Rezultă că $4 = m^2$ şi $5 - n = 2$.
Se obține $m \in \{-2, 2\}$, $n = 3$.

Sinteză

S1. *Rezolvare:*
Au loc egalitățile:
$a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{14} = 4$
$a_{21} = 2$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 3$, $a_{24} = 4$
$a_{31} = 3$, $a_{32} = 3$, $a_{33} = 3$, $a_{34} = 4$
$a_{41} = 4$, $a_{42} = 4$, $a_{43} = 4$, $a_{44} = 4$.

S2. *Rezolvare:*
Au loc egalitățile:
$b_{11} = 1^{1+1} = 1$; $b_{12} = 2^{1+1} = 4$; $b_{13} = 3^{1+1} = 9$
$b_{21} = 1^{2+1} = 1$; $b_{22} = 2^{2+1} = 8$; $b_{23} = 3^{2+1} = 27$
$b_{31} = 1^{3+1} = 1$; $b_{32} = 2^{3+1} = 16$; $b_{33} = 3^{3+1} = 81$.

S3. *Rezolvare:*
Se obțin următoarele elemente:
$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 2$; $c_{21} = c_{31} = c_{32} = 1$; $c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot A_2^1 = -2$; $c_{13} = (-1)^{1+3} A_3^1 = 3$; $c_{14} = (-1)^{1+4} A_4^1 = -4$;
$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot A_3^2 = -6$; $c_{24} = (-1)^{2+4} A_4^2 = 12$; $c_{34} = (-1)^{3+4} \cdot A_4^3 = -24$.

S4. *Rezolvare:*
a) $\mathrm{tr}(A) = 4 + (-2x) + y^2 + 6 = 10 - 2x + y^2$
$\mathrm{tr}(B) = 4x + (-x^2) + 2y = 4x - x^2 + 2y$

b) Relația din enunț se scrie sub forma: $(y^2 + 6) + 2y = 3 - (-6)$.
Se obține ecuația de gradul doi: $y^2 + 2y - 3 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -3$; $y_2 = 1$.

c) Se obține ecuația de gradul doi: $x^2 + x - 2 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

d) Se obține relația $10 - 2x + y^2 - 4x + x^2 - 2y = 4 - 4$ care se scrie sub forma:
$$(y - 1)^2 + (x - 3)^2 = 0, \; x, y \in \mathbb{R}.$$
Rezultă că $y - 1 = 0$ şi $x - 3 = 0$. Aşadar, $x = 3$, $y = 1$.

S5. *Rezolvare:*
a) Din egalitatea matriceală $A = I_2$ se obțin egalitățile:
$$2^{x-1} = 1, \quad \log_2(a - 1) = 0 \text{ şi } 4y^2 - 3x = 1.$$
Din egalitatea $2^{x-1} = 1$, rezultă $x - 1 = 0$, deci $x = 1$.
Înlocuind $x = 1$ în ecuația $4y^2 - 3x = 1$ se obține $4y^2 = 4$, deci $y \in \{-1, 1\}$.

Ecuația $\log_2(a-1)=0$ conduce la ecuația $a-1=2^0$ cu soluția $a=2$.

b) Deoarece $O_2 = B$ se obțin ecuațiile:

$$3^x - 9^x = 0,\ \lg\frac{y^2-2y}{3}=0,\ a+3bi-1=0 \text{ şi } 3!-C_n^2=0.$$

• Ecuația $3^x - 9^x = 0$ este echivalentă cu $3^x(1-3^x)=0$, adică $3^x = 0$ sau $1-3^x=0$. Se obține soluția $x=0$.

• Ecuația $\lg\frac{y^2-2y}{3}=0$ este echivalentă cu $\frac{y^2-2y}{3}=1$ cu soluția $y\in\{-1, 3\}$.

• Din egalitatea $a+3bi-1=0$, $a, b\in\mathbb{R}$ se obține $a-1=0$ şi $3b=0$, adică $a=1$ şi $b=0$.

• Din egalitatea $3!-C_n^2=0$ se obține $6-\frac{n(n-1)}{2}=0$, $n\in\mathbb{R}$, $n\geqslant 2$, ecuația cu soluția $n=4$.

S6. *Rezolvare:*

a) Aplicând egalitatea matricelor se obține următorul sistem de ecuații: $\begin{cases} a^2-4=2-a \\ a+b=-1 \\ 3x(1-2x)=2x-1 \\ z=x-2 \end{cases}$

Din ecuația $a^2-4=2-a$ se obține $a^2+a-6=0$ cu soluția $a\in\{-3, 2\}$.
Din ecuația $a+b=-1$ se obține $b=-a-1$.
Pentru $a=-3$, se obține $b=2$ şi pentru $a=2$, se obține $b=-3$.
Ecuația $3x(1-2x)=2x-1$ se scrie sub forma echivalentă $6x^2-x-1=0$ şi se obține $x\in\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

Pentru $x=\frac{1}{2}$ se obține $z=-\frac{3}{2}$ şi pentru $x=-\frac{1}{3}$ se obține $z=-\frac{7}{3}$.

b) Se obțin succesiv ecuațiile:

• $C_{n+1}^2=2C_n^2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, echivalentă cu $\frac{(n+1)\cdot n}{2}=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$ cu soluția $n\in\{3\}$.

• $\sqrt{x^2+7}=4 \Leftrightarrow x^2+7=16$, cu soluția $x\in\{-3, 3\}$.

• $\sqrt[3]{b^2}=4 \Leftrightarrow b^2=64$, cu soluția $b\in\{-8, 8\}$.

• $\log_2 a=-3 \Leftrightarrow \log_2 a=\log_2 2^{-3}$, $a>0$ cu soluția $a=\frac{1}{8}$.

S7. *Rezolvare:*

Din egalitatea matriceală $A = B = C$ se obțin următoarele egalități care dau valorile necunoscutelor din problemă:

• $x^2-x=2=3x-4$

• $\sqrt{y-3}=2=y-5$

• $C_{z+1}^2=3$

• $2^m=m^2=p$

Se obține: $x=2$, $y=7$, $z=2$; $m=2$ şi $p=4$ sau $m=4$ şi $p=16$.

1.2. Operații cu matrice
1.2.3. Înmulțirea unei matrice cu un scalar

Exersare

E1. *Rezolvare:*

Se aplică regula de adunare a două matrice și se obține succesiv:

a) $\begin{pmatrix} 2+(-7) & (-1)+8 & 3+5 \\ 5+3 & 4+0 & (-2)+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} -2a+a & b-5b \\ 3x+2x & -8y+6y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -4b \\ 5x & -2y \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} -6+2 & 2-7 & -5+3 \\ 1+4 & 0-1 & -1+2 \\ \frac{2}{3}-\frac{5}{3} & \frac{4}{5}+\frac{1}{5} & \frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{8}}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -5 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

E2. *Rezolvare:*

Se obține succesiv:

a) $\begin{pmatrix} -1-(-6)-1 & 4-1-0 \\ 2-0-0 & -5-2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} i^2+1-0 & -i^4+2-i \\ 2-2-(-3) & 3+0-2 \\ 1+3-4 & -1+4-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i^2+1 & -i^4+2-i \\ 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+1 & -1+2-i \\ 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

E3. *Rezolvare:*

$A+B=\begin{pmatrix} -1+1 & 2-3 & 0+2 \\ 1+0 & -3-1 & 2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} -1-1 & 2-(-3) & 0-2 \\ 1-0 & -3-(-1) & 2-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

${}^tA+{}^tB=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+1 & 1+0 \\ 2-3 & -3-1 \\ 0+2 & 2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

${}^t(A+B)={}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$ ${}^t(A-B)={}^t\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix};$

b) $A+{}^tC=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$B-{}^tC=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

${}^t(A-B+{}^tC)={}^t\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}\right]={}^t\begin{pmatrix} -1-1-1 & 2+3+0 & 0-2-4 \\ 1-0+2 & -3+1+3 & 2-2-5 \end{pmatrix}=$

$={}^t\begin{pmatrix} -3 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$

E4. *Rezolvare:*
Egalitatea $A + B + C$ este echivalentă cu următoarea egalitate de matrice:

$$\begin{pmatrix} 2x+1 & 4y+z & 3z+v \\ 1-y & u-v & -4+x \\ -v-x & -2v+2y & t+x-z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicând egalitatea a două matrice se obține că: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, $v = -3$, $u = 0$, $t = 0$.

E5. *Rezolvare:*
Folosind operațiile cu matrice egalitatea din enunț conduce la:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 0 \\ 7 & -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

egalitate din care se obține $X = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 0 \\ 7 & -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Rezultă că $X = \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

E6. *Rezolvare:*
Egalitatea ${}^tA = A$ se scrie sub forma echivalentă:

$$\begin{pmatrix} 5 & a^2 & 3 \\ 6-a & -1 & 3c+2 \\ \sqrt{b} & -10 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6-a & \sqrt{b} \\ a^2 & -1 & -10 \\ 3 & 3c+2 & n \end{pmatrix}$$

Se obțin ecuațiile: $a^2 = 6 - a$; $3 = \sqrt{b}$, $3c + 2 = -10$; $n = n$ cu soluțiile:
$a \in \{-3, 2\}$, $b = 9$, $c = -4$, $n \in \mathbb{R}$.

E7. *Rezolvare:*
Avem: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ sau

$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Să se dea şi alte scrieri pentru A ca sumă, respectiv diferență de două matrice.

$$A = I_2 + \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} - I_2 .$$

E8. *Rezolvare:*
Se înmulțeşte fiecare element al matricei cu numărul real

a) $\begin{pmatrix} \frac{6}{2} & -\frac{8}{2} \\ \frac{\sqrt{12}}{2} & \frac{0,2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \sqrt{3} & 0,1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -\frac{36}{3} & \frac{12}{3} & -\frac{24}{3} \\ -\frac{30}{6} & -\frac{2}{3}\cdot 3 & -\frac{3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -8 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Se va folosi că $\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$.

Se obține: $\begin{pmatrix} -(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) & 0 \\ \frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} & (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Se foloseşte faptul că $i^2 = -1$ din care se deduce că $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Se obține:

$$\begin{pmatrix} 2i^4 & i-i^2 \\ -3i^2 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i+1 \\ 3 & 4i \end{pmatrix}.$$

E9. Rezolvare. Se obține succesiv:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 & -15 \\ -2 & -15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2+0-3 & 8-1+3 & 6-3-15 \\ 2-2-2 & 0+5-15 & 2+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -12 \\ -2 & -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aşadar, $X = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -12 \\ -2 & -10 & 7 \end{pmatrix}$.

E10. *Rezolvare:*

Se efectuează înmulțirea cu un număr real a unei matrice şi operația de adunare a două matrice şi se obține egalitatea matriceală:

$$\begin{pmatrix} 2x+5 & -4y+(-15) & 8z+(-10) \\ -6+5a & 8+20b & -2+15c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 22 \\ -21 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Din egalitatea acestor două matrice rezultă următoarele ecuații de gradul întâi:
$2x + 5 = 7$, $-4y - 15 = 13$, $8z - 10 = 22$, $-6 + 5a = -21$, $8 + 20b = -2$, $-2 + 15c = 8$ cu soluțiile $x = 1$, $y = -7$; $z = 4$, $a = -3$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = \frac{2}{3}$.

Sinteză

S1. *Rezolvare:*

Egalitatea matriceală din enunț se scrie sub forma echivalentă astfel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^x & 3^y \\ -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^x & 6 \\ \log_2 z & C_n^2 \end{pmatrix}.$$

Efectuând adunarea matricelor se obține egalitatea matriceală $\begin{pmatrix} 2+2^x & 5+3^y \\ 1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^x & 6 \\ \log_2 z & C_n^2 \end{pmatrix}$ din care se obțin ecuațiile:

$$2 + 2^x = 4^x, \quad 5 + 3^y = 6, \quad \log_2 z = 1, \quad C_n^2 = 15.$$

• Ecuația $2 + 2^x = 4^x$ se scrie sub forma $4^x - 2^x - 2 = 0$. Cu notația $2^x = m$ se obține ecuația de gradul doi $m^2 - m - 2 = 0$, $m > 0$ cu soluția pozitivă $m = 2$.
Se obține $x = 1$.

• Din $5 + 3^y = 6$, rezultă $3^y = 1$ şi $y = 0$.

• Ecuația $\log_2 z = 1$ are soluția $z = 2$, iar ecuația $C_n^2 = 15$ se scrie sub forma echivalentă $\frac{n(n-1)}{2} = 15$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Se obține $n = 6$.

Aşadar, $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $n = 6$.

S2. *Rezolvare:*
Egalitatea matriceală din enunț se scrie succesiv
$$\begin{pmatrix} x^2+x & 2x \\ -x & x^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 4+y \\ z+2 & t+4 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x^2+x+3 & 3x \\ x & x^2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 4+y \\ z+2 & t+4 \end{pmatrix}.$$
Aplicând egalitatea a două matrice se obțin ecuațiile:
$$x^2 + x + 3 = 9,\ 3x = 4 + y,\ x = z + 2,\ x^2 + 3 = t + 4.$$
Ecuația $x^2 + x + 3 = 9$ are soluțiile $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.
• Pentru $x_1 = -3$ se obține: $y = -13$, $z_1 = -5$, $t_1 = 8$
• Pentru $x_2 = 2$ se obține: $y = 2$, $z_2 = 0$, $t_2 = 3$.

S3. *Rezolvare:*
a) Din egalitatea dată rezultă că $2A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, adică $2A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Se obține $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $3A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 20 & -5 & 10 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, deci $3A=\begin{pmatrix} -18 & 6 & -9 \\ -15 & -9 & 9 \end{pmatrix}$.

Se obține $A=\begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $7A=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 0 \\ -4 & -16 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 0 & 16 \\ 48 & -4 \end{pmatrix}$, egalitate din care se obține:

$7A=\begin{pmatrix} -7 & -14 \\ -7 & 14 \\ 49 & -14 \end{pmatrix}$. Rezultă că $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$.

S4. *Rezolvare:*
a) Înmulțim prima ecuație cu –2 și adunăm ecuația obținută cu cealaltă ecuație. Se obține:
$$-5B=\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow -5B=\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}.$$
Rezultă că $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Înlocuind pe B în prima ecuație din enunț și efectuând operațiile cu matrice se obține:
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.\text{ Așadar, } A = I_2.$$
b) Înmulțim prima ecuație cu $-(1 - i)$ și adunăm ecuația obținută cu a doua ecuație din enunț. Se obține egalitatea matriceală:
$$-(1+i)(1-i)A+A=-(1-i)\cdot\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 1-i & 2-i \end{pmatrix}$$
care se scrie sub forma:
$$-2A+A=\begin{pmatrix} -3+i & -1+i \\ -1+i & -3+i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 1-i & 2-i \end{pmatrix},\text{ sau } -A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Rezultă că $A = I_2$.

Pentru determinarea matricei B se înlocuie, de exemplu, matricea A în prima ecuație a enunțului şi efectuând calculele se obține $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

S5. *Soluție:*

a) Se scrie sub forma:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1^3 & 1\cdot 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2^3 & 2\cdot 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3^3 & 3\cdot 4\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}1 & n\\ n^3 & n(n+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1+1+\ldots+1 & 1+2+3+\ldots+n\\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 & 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}n & \sum\limits_{k=1}^{n}k\\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^3 & \sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)\end{pmatrix}.$$

Se ştie că $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Vom calcula suma următoare:

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\,.$$

Folosind formulele scrise mai înainte se obține că

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

Aşadar, $A=\begin{pmatrix}n & \dfrac{n(n+1)}{2}\\ \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} & \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Scriem mai întâi că: $2^k\cdot 3^{k+1}=2^k\cdot 3^k\cdot 3=6^k\cdot 3$ şi $2^k\cdot 3^{-k}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$. Cu acestea matricea A se scrie sub forma:

$$A=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}1 & 3\sum\limits_{k=1}^{n}6^k\\ \sum\limits_{k=1}^{n}2^k & \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\end{pmatrix}.$$

Reamintim că suma a n termeni aflați în progresie geometrică cu rația $q\neq 1$ şi primul termen notat a_1 este: $S=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.

Rezultă că:

- $\sum\limits_{k=1}^{n}6^k=6+6^2+\ldots+6^n=\dfrac{6(6^n-1)}{6-1}=\dfrac{6}{5}\cdot(6^n-1)$
- $\sum\limits_{k=1}^{n}2^k=2+2^2+\ldots+2^n=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1)$
- $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1}{\dfrac{2}{3}-1}=-2\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1\right]=2\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$.

Rezultă că $A=\begin{pmatrix}n & \dfrac{18}{5}\cdot(6^n-1)\\ 2(2^n-1) & 2\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]\end{pmatrix}$.

1.2.4. Înmulțirea matricelor

Exersare

E1. *Rezolvare:*

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2+5\cdot(-3) & 4\cdot 1+5\cdot(-2) \\ 6\cdot 2+(-1)\cdot(-3) & 6\cdot 1+(-1)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 15 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 4+(-2)\cdot 1 \\ 4\cdot 1+1\cdot 2 & 4\cdot 4+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 0+2\cdot 1 & -1\cdot(-2)+2(-1) & -1\cdot 3+2(-4) \\ 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot(-2)+0\cdot(-1) & 1\cdot 3+0\cdot(-4) \\ 2\cdot 0+i^2\cdot 1 & 2\cdot(-2)+i^2\cdot(-1) & 2\cdot 3+i^2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -11 \\ 0 & -2 & 3 \\ i^2 & (-4-i^2) & 6-4i^2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -11 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

d) Se înlocuie $\cos 0 = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $tg\frac{\pi}{4} = 1$ şi avem de efectuat următoarea înmulțire de matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 0 & 3\cdot(-1)+1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 3\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 0 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1 \\ 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e) Se aplică proprietatea de asociativitate a înmulțirii matricelor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot(-1) & 1\cdot 4+2\cdot 2+3\cdot(-1) \\ 3\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot 1 & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot 2+(-1)\cdot 1+1\cdot(-1) & 3\cdot 4+(-1)\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 1+12\cdot(-1)+1\cdot 0+5\cdot(-2) & 6\cdot 1+12\cdot 2+1\cdot 1+5\cdot 2 \\ 3\cdot 1+(-2)(-1)+4\cdot 0+9\cdot(-2) & 3\cdot 1+(-2)\cdot 2+4\cdot 1+9\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 41 \\ -13 & 21 \end{pmatrix}.$$

E2. *Rezolvare:*

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\cdot 1 & 1\cdot 1+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot 1 & 3\cdot 1+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cdot 1+1\cdot 3 & -\frac{1}{2}\cdot 3+1\cdot 1 \\ 1\cdot 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3 & 1\cdot 3+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$${}^tA\cdot{}^tB=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=A\cdot B=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$${}^tB\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}=B\cdot A=AB$$

b) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-3)&1\cdot 1&1\cdot(-1)\\2\cdot(-3)&2\cdot 1&2\cdot(-1)\\3\cdot(-3)&3\cdot 1&3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-6&2&-2\\-9&3&-3\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(-3\cdot 1+1\cdot 2+(-1)\cdot 3)=(-4)\in M_1(\mathbb{R})$$

$${}^tA\cdot{}^tB=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}=(1\cdot(-3)+2\cdot 1+3\cdot(-1))=(-4)\in M_1(\mathbb{R})$$

$${}^tB\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 1&-3\cdot 2&-3\cdot 3\\1\cdot 1&1\cdot 2&1\cdot 3\\-1\cdot 1&-1\cdot 2&-1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-6&-9\\1&2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

c) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\1&3\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot(-2)+1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2&-1\cdot 1+1\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 0\\0\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot 2&0\cdot 1+1\cdot 3+2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\5&3\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2&1\\1&3\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-1)+1\cdot 0&-2\cdot 1+1\cdot 1&-2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 2\\1\cdot(-1)+3\cdot 0&1\cdot 1+3\cdot 1&1\frac{1}{2}+3\cdot 2\\2\cdot(-1)+0\cdot 0&2\cdot 1+0\cdot 1&2\cdot\frac{1}{2}+0\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&4&6{,}5\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

$${}^tA\cdot{}^tB=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\\\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1&2\\1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot(-2)+0\cdot 1&-1\cdot 1+0\cdot 3&-1\cdot 2+0\cdot 0\\1\cdot(-2)+1\cdot 1&1\cdot 1+1\cdot 3&1\cdot 2+1\cdot 0\\\frac{1}{2}\cdot(-2)+2\cdot 1&\frac{1}{2}\cdot 1+2\cdot 3&\frac{1}{2}\cdot 2+2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&4&2\\1&6{,}5&1\end{pmatrix}={}^t(BA)$$

$${}^tB\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}-2&1&2\\1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\\\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}&-2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 2\\1\cdot(-1)+3\cdot 1+0\cdot\frac{1}{2}&1\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\2&3\end{pmatrix}={}^t(AB)$$

d) $A\cdot B=I_3\cdot B=B$
$B\cdot A=B\cdot I_3=B$
${}^tA\cdot{}^tB=I_3\cdot{}^tB={}^tB$
${}^tB\cdot{}^tA={}^tB\cdot I_3={}^tB$

E3. *Rezolvare:*

Calculăm

$$AB=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\\-3&1\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&-4&0\\0&1&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot3+2\cdot0&-1\cdot1+2\cdot1&-1\cdot(-4)+2\cdot0&-1\cdot0+2\cdot5\\0\cdot3+1\cdot0&0\cdot1+1\cdot1&0\cdot(-4)+1\cdot0&0\cdot0+1\cdot5\\-3\cdot3+1\cdot0&-3\cdot1+1\cdot1&-3\cdot(-4)+1\cdot0&-3\cdot0+1\cdot5\\2\cdot3+0\cdot0&2\cdot1+0\cdot1&2\cdot(-4)+0\cdot0&2\cdot0+0\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&1&4&10\\0&1&0&5\\-9&-2&12&5\\6&2&-8&0\end{pmatrix}.$$

Rezultă că $^{t}(AB)=\begin{pmatrix}-3&0&-9&6\\1&1&-2&2\\4&0&12&-8\\10&5&5&0\end{pmatrix}.$

$$^{t}B\cdot{}^{t}A=\begin{pmatrix}3&0\\1&1\\-4&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-3&2\\2&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)+0\cdot2&3\cdot0+0\cdot1&3\cdot(-3)+0\cdot1&3\cdot2+0\cdot0\\1\cdot(-1)+1\cdot2&1\cdot0+1\cdot1&1\cdot(-3)+1\cdot1&1\cdot2+1\cdot0\\-4\cdot(-1)+0\cdot2&-4\cdot0+0\cdot1&-4(-3)+0\cdot1&-4\cdot2+0\cdot0\\0\cdot(-1)+5\cdot2&0\cdot0+5\cdot1&0\cdot(-3)+5\cdot1&0\cdot2+5\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3&0&-9&6\\1&1&-2&2\\4&0&12&-8\\10&5&5&0\end{pmatrix}.$$

Se observă că $^{t}(AB)={}^{t}B\cdot{}^{t}A$.

Avem de asemenea: $AB+{}^{t}B^{t}A=\begin{pmatrix}-6&1&-5&16\\1&2&-2&7\\-5&-2&24&-3\\16&7&-3&0\end{pmatrix}.$

E4. *Rezolvare:*

$$A\cdot(B\cdot C)=A\cdot\begin{pmatrix}5\cdot0+1\cdot(-1)+(-2)(-4)&5\cdot2+1\cdot3+(-2)\cdot0&5\cdot0+1\cdot(-1)+(-2)(-2)\\1\cdot0+1\cdot(-1)+3\cdot(-4)&1\cdot2+1\cdot3+3\cdot0&1\cdot0+1\cdot(-1)+3\cdot(-2)\\-1\cdot0+1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)&(-1)\cdot2+1\cdot3+(-2)\cdot0&(-1)\cdot0+1\cdot(-1)+(-2)(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&-1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&13&3\\-13&5&-7\\7&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot7+0\cdot(-13)+3\cdot7&-1\cdot13+0\cdot5+3\cdot1&-1\cdot3+0\cdot(-7)+3\cdot3\\2\cdot7+(-1)(-13)+2\cdot7&2\cdot13+(-1)\cdot5+2\cdot1&2\cdot3+(-1)(-7)+2\cdot3\\1\cdot7+1\cdot(-13)+0\cdot7&1\cdot13+1\cdot5+0\cdot1&1\cdot3+1\cdot(-7)+0\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}14&-10&6\\41&23&19\\-6&18&-4\end{pmatrix}.$$

$$(A\cdot B)\cdot C=\begin{pmatrix}-1\cdot5+0\cdot1+3\cdot(-1)&-1\cdot1+0\cdot1+3\cdot1&-1\cdot(-2)+0\cdot3+3\cdot(-2)\\2\cdot5+(-1)1+2\cdot(-1)&2\cdot1+(-1)1+2\cdot1&2\cdot(-2)+(-1)3+2\cdot(-2)\\1\cdot5+1\cdot1+0\cdot(-1)&1\cdot1+1\cdot1+0\cdot1&1\cdot(-2)+1\cdot3+0\cdot(-2)\end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix}-8&2&-4\\7&3&-11\\6&2&1\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-2+16 & -16+6+0 & 0-2+8\\ 0-3+44 & 14+9+0 & 0-3+22\\ 0-2-4 & 12+6+0 & 0-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -10 & 6\\ 41 & 23 & 19\\ -6 & 18 & -4\end{pmatrix}.$$

Aşadar, $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

b) $$A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & -2\\ 0 & 4 & 2\\ -5 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+0-15 & -3+0+3 & 2+0-12\\ 10+0-10 & 6-4+2 & -4-2-8\\ 5+0+0 & 3+4+0 & -2+2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & 0 & -10\\ 0 & 4 & -14\\ 5 & 7 & 0\end{pmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+0-3 & -1+0+3 & 2+0-6\\ 10-1-2 & 2-1+2 & -4-3-4\\ 5+1+0 & 1+1+0 & -2+3+0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0+0-12 & -2+0+0 & 0+0-6\\ 0+1-8 & 4-3+0 & 0+1-4\\ 0-1+0 & 2+3+0 & 0-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -4\\ 7 & 3 & -11\\ 6 & 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & -2 & -6\\ -7 & 1 & -3\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & 0 & -10\\ 0 & 4 & -14\\ 5 & 7 & 0\end{pmatrix}.$$

Aşadar $A\cdot(B+C)=AB+AC$.

c) $$(A+B)\cdot C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 5\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ -4 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1-4 & 8+3+0 & 0-1-2\\ 0+0-20 & 6+0+0 & 0+0-10\\ 0-2+8 & 0+6+0 & 0-2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 11 & -3\\ -20 & 6 & -10\\ 6 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

Pentru calculul expresiei $A\cdot C+B\cdot C$ vom folosi calculul lui A · C făcut la punctul b) şi al lui $B\cdot C$ făcut la a).

Avem: $$A\cdot C+B\cdot C=\begin{pmatrix}-12 & -2 & -6\\ -7 & 1 & -3\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 13 & 3\\ -13 & 5 & -7\\ 7 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 11 & -3\\ -20 & 6 & -10\\ 6 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

Aşadar, $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

E5. *Rezolvare:*

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1 & 2-3\\ 2-3 & 1+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 10\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & -1-2\\ 3+6 & -3+4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2-9 & 2-6\\ 9+3 & -9+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -4\\ 12 & -7\end{pmatrix}.$$

Avem: $$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1 & -2-1\\ -2-1 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25+9 & -15-6\\ -15-6 & 9+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & -21\\ -21 & 13\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^4\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & -21\\ -21 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}68+21 & -34-21\\ -42-13 & 21+13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}89 & -55\\ -55 & 34\end{pmatrix}.$$

E6. *Rezolvare:*

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+8-8 & -2-6+8 & 2+8-10\\ -4-12+16 & 8+9-16 & -8-12+20\\ -4-16+20 & 8+12-20 & -8-16+25\end{pmatrix}=I_3$$

Aşadar $A^2 = I_3$.

$A^3 = A^2 \cdot A = I_3 \cdot A = A$

$A^{2006} = (A^2)^{1003} = I_3^{2003} = I_3$

$(A^3 + I)^{10} = (A + I_3)^{10}$

Dar $A + I_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{not}{=} 2 \cdot B$ şi $B^2 = B$.

Rezultă că $(A + I_3)^{10} = (2B)^{10} = 2^{10} \cdot B^{10} = 2^{10} \cdot B$.

E7. *Rezolvare:*

Calculăm câteva puteri consecutive ale lui A

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Din forma de scriere a matricelor A, A^2, A^3, A^4 se deduce că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, formulă care o demonstrăm prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

Pentru $n = 1$, rezultă că $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$, ceea ce este evident adevărat.

Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem că $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Aşadar, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

E8. *Rezolvare:*

Luăm matricea X de forma: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$, $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

• Înlocuind în relația de la a) avem: $\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,

relație echivalentă cu $\begin{pmatrix} -a+3b & 2a+4b \\ -x+3y & 2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Se obțin sistemele de ecuații: $\begin{cases} -a+3b = 5 \\ 2a+4b = 10 \end{cases}$ şi $\begin{cases} -x+3y = 4 \\ 2x+4y = 2 \end{cases}$

cu soluțiile $a = 1$, $b = 2$, respectiv $x = -1$, $y = 1$.

Aşadar, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Înlocuind în relația de la punctul b) se obține: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$,

relație echivalentă cu: $\begin{pmatrix} -a+3x & -b+3y \\ 2a+x & 2b+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Din această egalitate de matrice se obțin sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} -a+3x=5 \\ 2a+x=4 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} -b+3y=7 \\ 2b+y=0 \end{cases}$$

care au soluțiile a = 1, x = 2, respectiv b = –1, y = 2. Aşadar, $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

E9. *Rezolvare:*

a) $B = 2f(A) - f(A + I_2)$. Avem:

$f(A) = A^3 - 4A + 2I_2$

Dar $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

Rezultă că $f(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$f(A + I_2) = (A + I_2)^3 - 4(A + I_2) + 2I_2$.

Dar $A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $(A+I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

şi $(A+I_2)^3 = (A+I_2)^2 \cdot (A+I_2) = O_2$.

Rezultă că $f(A+I_2) = O_2 - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

Înlocuind în expresia matricei B se obține:

$$B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

b) Calculăm $A - {}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Din punctul a) avem că $f(A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$f(A - {}^tA) = (A - {}^tA)^3 - 4(A - {}^tA) + 2I_2$.

Dar $(A - {}^tA)^3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$.

Rezultă că $f(A - {}^tA) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ -16 & 2 \end{pmatrix}$.

Înlocuind în expresia matricei C se obține:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ -16 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 32 \\ -32 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 32 \\ -34 & 9 \end{pmatrix}.$$

Sinteză

S1. *Rezolvare:*

a) Matricea X trebuie să fie de tipul (3, 2) pentru a avea loc egalitatea de matrice din enunț.

Înlocuind pe X avem: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Efectuând înmulțirea de matrice se obține următoarea egalitate de matrice:

$$\begin{pmatrix} a-b+c & x-y+z \\ b-c & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

din care se obține sistemul de ecuații: $\begin{cases} a-b+c=0 \\ b-c=3 \\ x-y+z=3 \\ y-z=2 \end{cases}$

Din primele două ecuații se obține $a = b - c = 3$, $b = 3 + c$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Din următoarele două ecuații se obține $x = 5$, $y = 2 + z$ şi $z \in \mathbb{R}$.

Aşadar $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3+c & 2+z \\ c & z \end{pmatrix}$, $c, z \in \mathbb{R}$.

b) În egalitatea aceasta se impune condiția ca $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Avem:

$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, egalitate care se scrie sub forma: $\begin{pmatrix} -a+4b+c \\ b+3c \\ -2a+2b+5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Identificând elementele corespunzătoare ale acestor matrice se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} -a+4b+c=-3 \\ b+3c=8 \\ -2a+2b+5c=9 \end{cases}$$

Înmulțind prima ecuație cu -2 şi adunând-o la ecuația a treia se obține un sistem de două ecuații cu necunoscutele b şi c:

$$\begin{cases} -6b+3c=15 \\ b+3c=8 \end{cases} \quad \text{cu soluția: } b=-1,\ c=3.$$

Înlocuind b şi c în una din ecuațiile care conțin a se obține $a = 2$.

Aşadar, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) În această relație matriceală matricea X este pătratică de ordinul 3:

Avem: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Efectuând înmulțirea de matrice se obține egalitatea matriceală:

$$\begin{pmatrix} a-b+c & x-y+z & m-n+p \\ 2a+3c & 2x+3z & 2m+3p \\ a+b-2c & x+y-2z & m+n-2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Punând condiția egalității celor două matrice se structurează trei sisteme de ecuații cu câte trei necunoscute de forma:

$$\begin{cases} a-b+c=8 \\ 2a+3c=9 \\ a+b-2c=-3 \end{cases}, \begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+3z=5 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}, \begin{cases} m-n+p=-1 \\ 2m+3p=4 \\ m+n-2p=5 \end{cases}$$

Se obțin soluțiile: $a = 3$, $b = -4$; $c = 1$

$x = 1$; $y = 0$; $z = 1$

$m = 2$; $n = 3$; $p = 0$

Aşadar, $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

S2. *Rezolvare:*

a) Avem egalitatea: $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

care este echivalentă cu: $\begin{pmatrix} a+5x & b+5y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se obțin egalitățile de elemente:

- $a + 5x = 1$
- $b + 5y = 0$
- $x = 0$

Rezultă că: $a = 1$, $b = -5$ şi $X = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) Înlocuind A, X şi B se obține egalitatea:

$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Procedând ca la a) se obține sistemul de ecuații: $\begin{cases} a+5x=2 \\ b+5y=1 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases}$

cu soluțiile $a = -3$; $b = -4$, $x = 1$, $y = 1$. Aşadar, $X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) După înlocuirea matricelor X, A şi B se obține egalitatea $\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, care este echivalentă cu: $\begin{pmatrix} a & 5a+b \\ x & 5x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezultă că: $a = 2$, $x = 1$, $5a + b = 1$, $5x + y = 1$.

Se obține că $X = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

d) $AX = XB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+5x & b+5y \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2x+y & x+y \end{pmatrix}$.

Se obține sistemul de ecuații:

$\begin{cases} a+5x=2a+b \\ b+5y=a+b \\ x=2x+y \\ y=x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-5x=0 \\ a-5y=0 \\ x+y=0 \\ x=0 \end{cases}$, cu soluția $x = y = a = b = 0$. Rezultă că $X = O_2$.

e) Egalitatea $BXB = A$ este echivalentă cu: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Efectuând înmulțirea de matrice se obține succesiv:

$$\begin{pmatrix} 2a+x & 2b+y \\ a+x & b+y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4a+2x+2b+y & 2a+x+2b+y \\ 2a+2x+b+y & a+x+b+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Identificând elementele celor două matrice egale se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 4a+2x+2b+y=1 \\ 2a+x+2b+y=5 \\ 2a+2x+b+y=0 \\ a+x+b+y=1 \end{cases}$$

Scădem primele două ecuații între ele şi ultimele două ecuații între ele. Se obține un nou sistem de ecuații: $\begin{cases} 2a+x=-4 \\ a+x=-1 \end{cases}$, cu soluția: $a = -3$; $x = 2$

Înlocuim pe a şi x în prima şi a treia ecuație a sistemului inițial şi se obține un sistem cu două ecuații cu necunoscutele b şi y: $\begin{cases} 2b+y=9 \\ b+y=2 \end{cases}$, cu soluția $b = 7$, $y = -5$.

Aşadar $X = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

S3. *Rezolvare:*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$$

Înlocuind în egalitatea din enunț se obține egalitatea matriceală:

$$\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 3b \\ -3b & -3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

echivalentă cu:

$$\begin{pmatrix} a^2-b^2-3a+2 & -2ab+3b \\ 2ab-3b & a^2-b^2-3a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Din această egalitate matriceală se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} a^2-b^2-3a+2=-1 \\ 2ab-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2-3a=-3 \\ 2ab-3b=1 \end{cases}$$

Sistemul de ecuații se aduce la forma: $\begin{cases} b^2=a^2-3a+3 \\ b(2a-3)=1 \end{cases}$

Se ridică la pătrat a doua ecuație şi se substituie b^2 obținându-se ecuația:

$$(a^2 - 3a + 3)(2a - 3)^2 = 1, \quad \text{sau} \quad (a^2 - 3a + 3)[4(a^2 - 3a) + 9] = 1.$$

Se notează $a^2 - 3a = y$ şi se obține ecuația

$$(y + 3)(4y + 9) = 1 \text{ cu soluțiile } y_1 = -2,\ y_2 = \frac{-13}{4}.$$

Revenind la notația făcută se obține:

$a^2 - 3a = -2$, cu soluția $a \in \{1, 2\}$, respectiv $a^2-3a=-\frac{13}{4}$ care nu are soluții reale.

Pentru $a = 1$ se obține $b = -1$, iar pentru $a = 2$ se obține $b = 1$.

Aşadar, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sau $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

S4. *Rezolvare:*

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ecuația matriceală devine:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2x & 2y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

echivalentă cu:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2x & 2y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a+2x & b+2y \\ -a+x & -b+y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

sau încă:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2x & 2y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3a+6x-b-2y & a+2x+b+2y \\ -3a+3x+b-y & -a+x-b+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Efectuând scăderea de matrice şi respectând egalitatea de matrice se obține sistemul de ecuații cu necunoscutele a, b, x, y.

$$\begin{cases} -a-6x+b+2y=1 \\ -a-2x+b-2y=-3 \\ 3a-x-b+y=4 \\ a-x+b+y=2 \end{cases} \qquad (1)$$

Adunăm ecuația a treia la toate celelalte ecuații ale sistemului (1) şi se obține:

$$\begin{cases} 2a-7x+3y=5 \\ 2a-3x-y=1 \\ 4a-2x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-7x+3y=5 \\ 2a-3x-y=1 \\ 2a-x+y=3 \end{cases} \qquad (2)$$

Scădem prima ecuație din celelalte două ecuații şi se obține: $\begin{cases} -4x+4y=4 \\ -6x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=1 \\ -3x+y=1 \end{cases}$.

Se obține $x=0$ şi $y=1$.
Înlocuind x şi y în una din ecuațiile sistemului (2) se obține $a=1$.
Înlocuind a, x şi y într-o ecuație a sistemului (1) se obține $b=0$.

Aşadar, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

S5. *Rezolvare:*

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Egalitatea din enunț se scrie sub forma următoare:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Efectuând înmulțirea de matrice se obține egalitatea matriceală:

$$\begin{pmatrix} a-x & b-y \\ 3a+2x & 3b+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+3b & -a+2b \\ x+3y & -x+2y \end{pmatrix}$$

din care se obține sistemul de ecuații: $\begin{cases} a-x=a+3b \\ b-y=-a+2b \\ 3a+2x=x+3y \\ 3b+2y=-x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3b \\ y=a-b \\ a,b\in\mathbb{R} \end{cases}$.

Aşadar $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a-b \end{pmatrix}$, $a, b\in \mathbb{R}$.

S6. *Rezolvare:*

Să calculăm mai întâi A^2 şi A^3. Avem:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 14 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Înlocuind A^2 şi A^3 în relaţia din enunţ se obţine:

$$\begin{pmatrix} -13 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 14 & 0 & -13 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sau încă:

$$\begin{pmatrix} -13 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 14 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+y & 0 & -4x-2y \\ 0 & x-y & 0 \\ -4x-2y & 0 & 5x+y \end{pmatrix}.$$

Identificând elementele omoloage ale acestor matrice egale se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 5x+y=-13 \\ -4x-2y=14 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ cu soluţia: } x=-2,\ y=-3.$$

S7. *Rezolvare:*

Matricea A se poate scrie sub forma: $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$.

Pentru uşurinţa scrierii vom nota $x = \frac{\pi}{6}$. Calculăm câteva puteri ale matricei A şi obţinem:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & 2\sin x\cos x \\ -2\sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \sin x & \cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x \\ -\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x & -\sin x \sin 2x + \cos 2x \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2x+x) & \sin(x+2x) \\ -\sin(x+2x) & \cos(2x+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{pmatrix}.$$

Din forma de scriere a matricelor A, A^2, A^3 se poate generaliza că

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrăm această relaţie prin inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 1$ se obţine $A^1 = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$, ceea ce este evident adevărat.

Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -\sin kx & \cos kx \end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos(k+1)x & \sin(k+1)x \\ -\sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{pmatrix}$.

Avem că

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -\sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kx \cdot \cos x - \sin kx \cdot \sin x & \cos kx \sin x + \sin kx \cos x \\ -\sin kx \cos x - \cos kx \sin x & -\sin kx \sin x + \cos kx \cos x \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(kx+x) & \sin(kx+x)\\ -\sin(kx+x) & \cos(kx+x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(k+1)x & \sin(k+1)x\\ -\sin(k+1)x & \cos(k+1)x\end{pmatrix}$$, ceea ce trebuia arătat.

Aşadar, $A^n=\begin{pmatrix}\cos nx & \sin nx\\ -\sin nx & \cos nx\end{pmatrix}$, $\forall n\in \mathbb{N}^*$, unde $x=\frac{\pi}{6}$.

S8. *Rezolvare:*

Avem:
$$A^2=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&3&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&7&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}$$
$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}8&7&0\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&15&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}$$

Analizând forma de scriere a matricelor A, A^2, A^3, A^4 se observă că A^n se poate scrie sub forma: $A^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Demonstrăm această formulă prin inducție matematică după $n\in\mathbb{N}^*$.

Pentru $n=1$ se obține $A^1=A$.

Presupunem că $A^k=\begin{pmatrix}2^k&2^k-1&0\\0&1&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $A^{k+1}=\begin{pmatrix}2^{k+1}&2^{k+1}-1&0\\0&1&0\\0&0&2^{k+1}\end{pmatrix}$.

Avem că
$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}2^k&2^k-1&0\\0&1&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1}&2^k+2^k-1&0\\0&1&0\\0&0&2^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1}&2^{k+1}-1&0\\0&1&0\\0&0&2^{k+1}\end{pmatrix},$$
ceea ce trebuia demonstrat.

Aşadar $A^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

S9. *Rezolvare:*

a) $$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1-2x&x\\-6x&1+3x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-2y&y\\-6y&1+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-2x)(1-2y)+x(-6y)&(1-2x)y+x(1+3y)\\-6x(1-2y)-6y(1+3x)&-6xy+(1+3x)(1+3y)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1-2x-2y+4xy-6xy&y-2xy+x+3xy\\-6x+12xy-6y-18xy&-6xy+1+3x+3y+9xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2(x+y+xy)&x+y+xy\\-6(x+y+xy)&1+3(x+y+xy)\end{pmatrix}=$$
$$=A(x+y+xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Aşadar, $A(x), A(y)=A(x+y+xy)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Vom respecta regula de înmulțire a două matrice $A(x)$, $A(y)$ dată de punctul a).

Avem: $A^2(x) = A(x)\cdot A(x) \overset{a)}{=} A(x + x + x\cdot x) = A(2x + x^2)$

$A((x + 1)^2 - 1) = A(x^2 + 2x + 1 - 1) = A(x^2 + 2x)$

Aşadar $A^2(x) = A((x+1)^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$A^3(x) = A^2(x)\cdot A(x) = A(x^2+2x)\cdot A(x) \overset{a)}{=} A(x^2+2x+x+x(x^2+2x)) = A(x^3+3x^2+3x) = A((x+1)^3-1)$.

Aşadar $A^3(x) = A((x + 1)^3 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Folosind punctul b) se poate generaliza că: $A^n_{(x)} = A((x+1)^n - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vom demonstra această formulă prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 1$, formula devine: $A^1(x) = A(x+1-1) \Leftrightarrow A(x) = A(x)$

Presupunem că $A^k(x) = A((x+1)^k - 1)$ şi demonstrăm că $A^{k+1}(x) = A((x + 1)^{k+1} - 1)$

Dar $A^{k+1}(x) = A^k(x)\cdot A(x) = A((x+1)^k - 1)\cdot A(x) \overset{a)}{=} A\left((x+1)^k - 1 + x + x(x+1)^k - x\right) =$

$= A((x+1)^k(1+x) - 1) = A((x+1)^{k+1} - 1)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Aşadar $A^n(x) = A((x + 1)^n - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că pentru $n = 2006$ şi $x = 1$ se obține

$$A^{2006}(1) = A((1+1)^{206} - 1) = A(2^{2006} - 1) = \begin{pmatrix} 1-2(2^{2006}-1) & 2^{2006}-1 \\ -6(2^{2006}-1) & 1+3(2^{2006}-1) \end{pmatrix}.$$

S10. Rezolvare:

a) $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Aşadar $I_3 + B = A$.

Pentru calculul lui A^n folosim că $A = I_3 + B$ şi aplicăm formula binomului lui Newton:

$$A^n = (I_3 + B)^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + C_n^3 B^3 + \ldots + C_n^n B^n.$$

Dar $B^2 = B\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B^3 = O_3$, deci $B^n = O_3$, $n \geqslant 3$.

Rezultă că $A^n = I_3 + n\cdot B + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot B^2$. (1)

Pentru calculul sumei S se foloseşte formula 1 dând lui n valori de la 1 la 20 şi însumând.

Se obține: $S = I_3 + B +$

$I_3 + 2B + \dfrac{2\cdot 1}{2}\cdot B^2 +$

$I_3 + 3B + \dfrac{3\cdot 2}{2}\cdot B^2 +$

....

$I_3 + 20B + \dfrac{20\cdot 19}{2}\cdot B^2 =$

$= 20I_3 + (1+2+3+\ldots+20)B + \frac{1}{2}(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + \ldots + 19\cdot 20)B^2 = 20I_3 + \dfrac{20\cdot 21}{2}\cdot B + \dfrac{1}{2}\cdot \sum_{k=1}^{20} k(k-1)\cdot B^2 =$

$= 20I_3 + 210B + \frac{1}{2}\left[\dfrac{20\cdot 21\cdot 41}{6} - \dfrac{20\cdot 21}{2}\right]\cdot B^2 = 20I_3 + 210B + 2660B^2$.

S11. *Rezolvare:*

a) $C(k)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&k\\k^2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k^2&k+1\\k^2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2+k+2&k+1\\k^2+1&1\end{pmatrix}$

b) $S=\sum\limits_{k=1}^{20}C(k)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{20}(k^2+k+2)&\sum\limits_{k=1}^{20}(k+1)\\\sum\limits_{k=1}^{20}(k^2+1)&\sum\limits_{k=1}^{20}1\end{pmatrix}$.

Calculăm separat fiecare termen al matricei S.

$$\sum_{k=1}^{20}(k^2+k+2)=\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}2=\left.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right|_{n=20}+\left.\frac{n(n+1)}{2}\right|_{n=20}+20\cdot2=$$

$$=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}+\frac{20\cdot21}{2}+40=2870+210+40=3120.$$

$$\sum_{k=1}^{20}(k+1)=\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1=\frac{20\cdot21}{2}+20=210+20=230.$$

$$\sum_{k=1}^{20}(k^2+1)=\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}1=\frac{20\cdot21\cdot41}{6}+20=2870+20=2890.$$

Aşadar, $S=\begin{pmatrix}3120&230\\2890&20\end{pmatrix}$.

TESTE DE EVALUARE

TESTUL 1

1. *Rezolvare:*

Relația   = 5 este echivalentă cu $2x^2+3x-5=0$.

Se obține $x_1=1$, $x_2=-\frac{5}{2}$. Aşadar, răspunsul este d).

2. *Rezolvare:*

Avem: $\begin{pmatrix}x&2x\\2x&x^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y^2&3y\\3y&3xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\5&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+3y^2&2x+3y\\2x+3y&x^2+3xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\5&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y^2=4\\2x+3y=5\\x^2+3xy=4\end{cases}$ (1)

Din prima ecuație se obține $x=4-3y^2$.

Substituind în a doua ecuație se obține ecuația $2y^2-y-1=0$ cu soluțiile $y_1=1$, $y_2=-\frac{1}{2}$.

• Pentru $y=1$ se obține $x=1$, valori care satisfac şi ecuația a treia a sistemului (1)

• Pentru $y=-\frac{1}{2}$ se obține $x=\frac{13}{4}$, valori care nu satisfac ecuația a treia a sistemului (1).

Aşadar, $x=y=1$.

3. *Rezolvare:*

a) Să determinăm A^9, respectiv A^{10}.

$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}$. $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&4&4\\0&1&0\\4&3&4\end{pmatrix}$, $A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}8&8&8\\0&1&0\\8&7&8\end{pmatrix}$.

Se demonstrează prin inducție că $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 9$, respectiv $n = 10$ se determină A^9, A^{10} şi

$$B = A^9 + A^{10} = \begin{pmatrix} 2^8 & 2^8 & 2^8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^8 & 2^8-1 & 2^8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 2^9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^9 & 2^9-1 & 2^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 640 & 640 & 640 \\ 0 & 2 & 0 \\ 640 & 638 & 640 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că $\text{tr}(B) = 640 + 2 + 640 = 1282$ şi $b_{31} + b_{22} + b_{13} = 1282$.

b) Demonstrăm prin inducție matematică faptul că $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 1$, egalitatea este evidentă.

Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 2^{k-1}-1 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 2^k-1 & 2^k \end{pmatrix}$.

Dar

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 2^{k-1}-1 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{k-1} & 2\cdot 2^{k-1} & 2\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\cdot 2^{k-1} & 2\cdot 2^{k-1}-1 & 2\cdot 2^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 2^k-1 & 2^k \end{pmatrix},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Aşadar, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1}-1 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 2

1. *Rezolvare:*

a) Luând $x = 0$ se obține $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{M}$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}$. Rezultă că există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A = A(x)$ şi $B = A(y)$. În acest caz,

$$A \cdot B = A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & (-1)^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & (-1)^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y + (-1)^y \cdot x \\ 0 & (-1)^{x+y} \end{pmatrix}.$$

Deoarece $(-1)^{y+(-1)^y \cdot x} = (-1)^y \cdot (-1)^{(-1)^y \cdot x} = (-1)^y \cdot \left((-1)^{(-1)^y}\right)^x = (-1)^y \cdot (-1)^x = (-1)^{x+y}$, rezultă că $A \cdot B \in \mathcal{M}$.

c) Fie $A = A(x)$, $x \in \mathbb{Z}$.

• Pentru $x = 2k$, $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prin inducție se arată că $A^n(x) = \begin{pmatrix} 1 & nx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

• Pentru $x = 2k + 1$, $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A^2(x)=I_2$.

$A^3(x) = A(x)$. În general, se obține că $A^n(x)=\begin{cases}I_2,\ n=\text{par}\\ A,\ n=\text{impar}\end{cases}$.

2. *Rezolvare:*

Se obțin ecuațiile:

$$2^x + 4^x = 20,\quad 3^y + 9^y = 90,\quad C_z^2 = 45,\quad 5A_{t+1}^2 = 60.$$

• Ecuația $2^x + 4^x = 20$ se scrie sub forma $4^x + 2^x - 20 = 0$. Notând $2^x = m > 0$ se obține ecuația $m^2 + m - 20 = 0$ cu soluțiile $m_1 = 4$ şi $m_2 = -5$, de unde se obține $x = 2$.

• Notând $3^y = a$ se obține ecuația de gradul doi $a^2 + a - 90 = 0$ cu soluțiile $a_1 = 9$, $a_2 = -10$ din care se obține $y = 2$.

• Ecuația $C_z^2 = 45$ este echivalentă cu $\frac{z(z-1)}{2} = 45$ sau încă $z^2 - z - 90 = 0$ cu soluția naturală $z = 10$.

• Din $5A_{t+1}^2 = 60$ se obține $(t + 1)t = 12$, adică $t^2 + t - 12 = 0$, cu soluția naturală $t = 3$.
Aşadar, $x = 2$, $y = 2$, $z = 10$, $t = 3$.

3. *Rezolvare:*

Înlocuind $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se obține ecuația $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ x & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & x\\ b & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$, care se scrie sub forme echivalente astfel:

$$\begin{pmatrix}a+x & b+y\\ x & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & a+x\\ b & b+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 3 & 7\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2a+x & b+a+y+x\\ x+b & b+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

Rezultă că: $\begin{cases}2a+x=4\\ x+b=3\\ b+a+y+x=7\\ b+2y=7\end{cases}$

Se obține: $a = 4 - y$; $b = 7 - 2y$, $x = 2y - 4$, $y \in \mathbb{Z}$.

Aşadar $A=\begin{pmatrix}4-y & 7-2y\\ 2y-4 & y\end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{Z}$.

4. *Rezolvare:*

$$AB-BA=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & ay\\ bx & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & xa\\ by & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & ay-ax\\ bx-by & 0\end{pmatrix}$$

$$(AB-BA)^2=\begin{pmatrix}0 & ay-ax\\ bx-by & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & ay-ax\\ bx-by & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(ay-ax)(bx-by) & 0\\ 0 & (bx-by)(ay-ax)\end{pmatrix}.$$

Aşadar $(AB - BA)^2$ are cel puțin două elemente nule.

Capitolul II. Determinanți
2.1. Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult trei

Exersare

E1. *Rezolvare*

a) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 10 - 8(-5) = 20$;

b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -6 \\ -3 & \sqrt{32} \end{vmatrix} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{32} - (-3)(-6) = 64 - 18 = 46$

c) $\begin{vmatrix} 1,5 & -7,2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1,5\cdot 8 - 5\cdot(-7,2) = 12 + 36 = 48$;

d) $\begin{vmatrix} 2+i & -1 \\ i^2 & 2-i \end{vmatrix} = (2+i)(2-i) - i^2(-1) = 4\cdot i^2(-1) = 4 - i^2 + i^2 = 4$.

E2. *Rezolvare.*

a) $\begin{vmatrix} \frac{7}{5} & \frac{8}{3} \\ 9 & 25 \end{vmatrix} = \frac{7}{5}\cdot 25 - 9\cdot\frac{8}{3} = 35 - 24 = 11$;

b) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{32} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{75} \end{vmatrix} = \sqrt{3}\cdot(-\sqrt{75}) - \sqrt{2}\cdot(-\sqrt{32}) = -\sqrt{225} + \sqrt{64} = -15 + 8 = -7$;

c) $\begin{vmatrix} -1-\sqrt{3} & \sqrt{5}-1 \\ 1+\sqrt{5} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix} = -(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) - (1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1) = --2-4 = -6$;

d) $\begin{vmatrix} \lg 100 & 0,5 \\ -8 & \lg 0,1 \end{vmatrix} = \lg 100\cdot\lg 0,1 + 8\cdot 0,5 = 2\cdot(-1) + 4 = 2$;

e) $\begin{vmatrix} 3! & 5! \\ 0! & 4! \end{vmatrix} = 3!4! - 0!5! = 6\cdot 24 - 1\cdot 120 = 24$;

f) $\begin{vmatrix} A_4^2 & A_3^3 \\ C_5^1 & C_4^3 \end{vmatrix} = A_4^2\cdot C_4^3 - C_5^1\cdot A_3^3 = 12\cdot 4 - 5\cdot 6 = 18$;

g) $\begin{vmatrix} 2^{x+1} & 3^{2y} \\ 9^{-y+1} & 2^{-x} \end{vmatrix} = 2^{x+1}\cdot 2^{-x} - 9^{-y+1}\cdot 3^{2y} = 2 - 9 = -7$;

h) $\begin{vmatrix} (1-i)^2 & -i \\ i & (1+i)^2 \end{vmatrix} = (1-i)^2(1+i)^2 - i(-i) = (1-i^2)^2 + i^2 = 4 - 1 = 3$.

E3. *Rezolvare*

a) $\det(A) + \det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (8+7) + (8+30) = 53$

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = 48 + 78 = 126$.

Rezultă că $\det(A) + \det(B) < \det(A+B)$, pentru matricele date.

b) $\det(AB) = \begin{vmatrix} 2 & -12 \\ 52 & -27 \end{vmatrix} = -54 + 624 = 570$

$\det(A) \cdot \det(B) = 15 \cdot 38 = 570$

Aşadar, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$;

c) $\det[\sqrt{3}(A - I_2)] = \det\left[\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 7\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = 9 + 21 = 30$.

$\det(A + 2I_2) = \det\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 7 = 31$.

Rezultă că $\det[\sqrt{3}(A - I_2)] < \det(A + 2I_2)$.

E4. *Rezolvare*

a) Ecuația se scrie sub forma: $-2x + 12x = 20 \Leftrightarrow 10x = 20 \Leftrightarrow x = 2$.

b) Se obține: $5x - 6x + 2 = 10 \Leftrightarrow x = -8$.

c) Se obține: $6x^2 - x^2 - x = 4 \Leftrightarrow 5x^2 - x - 4 = 0$ cu soluțiile:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{4}{5};$$

d) Ecuația este: $3x - x^2 - 4x^2 + x - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow 5x^2 + x - 6 = 0$ cu soluțiile:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{6}{5};$$

e) Avem: $x^2 - xi - 2xi = 9 - xi \Leftrightarrow x^2 - 2xi - 9 = 0$ cu soluțiile:

$$x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2};$$

f) Se obține succesiv:

$$6^x - x = 36^x - x - 30 \Leftrightarrow 36^x - 6^x - 30 = 0.$$

Notând $6^x = y$ se obține ecuația $y^2 - y - 30 = 0$ cu soluțiile:

$$y_1 = 6,\ y_2 = -5.$$

Se obține soluția $x = 1$.

E5. Rezolvare:

Regula lui Sarrus

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{matrix} \end{array} = 3 \cdot 4(-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + (-2)(-1) \cdot 5 - 2 \cdot 4(-2) - 5(-1) \cdot 3 - (-1)(-1) \cdot 1 = 26.$$

Regula triunghiului

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot 5 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 5 \cdot 3 =$$

$$= 26$$

Regula minorilor

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\delta_{11} + (-1)\cdot\delta_{12} + 2\cdot\delta_{13} = 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3(-4+5) + (-1+10) + 2(-1+8) = 26.$$

Se procedează analog pentru ceilalți determinanți și se obțin rezultatele:
b) 18; c) –10; d) –4; e) 3; f) 0; g) 0; h) 0.

E7. *Rezolvare:*

a) Se observă că elementele liniilor „unu” și „trei” sunt proporționale.
Rezultă că determinantul este nul.

b) Se dă factor comun 10 de pe coloana I și se obține:

$$10\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10(1+30-10-30+5-2) = -60;$$

c) Se observă că determinantul are prima și a treia coloană proporționale, factorul de proporționalitate fiind $k = -5$.
Rezultă că determinantul este nul.

d) Se formează două zerouri scăzând prima linie din celelalte. Avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 0 & b-a & n-m \\ 0 & c-a & p-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & n-m \\ c-a & p-m \end{vmatrix} = (b-a)(p-m) - (n-m)(c-a);$$

e) Se adună coloana a doua și a treia la prima coloană, se dă factor comun de pe această coloană și se obține:

$$\begin{vmatrix} x+2y & y & y \\ x+2y & x & y \\ x+2y & y & x \end{vmatrix} = (x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 1 & x & y \\ 1 & y & x \end{vmatrix}.$$

Se formează zerouri pe prima coloană scăzând prima linie din celelalte linii.

Se obține: $(x+2y)\begin{vmatrix} 1 & y & y \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{vmatrix} = (x+2y)\begin{vmatrix} x-y & 0 \\ 0 & x-y \end{vmatrix} = (x+2y)(x-y)^2;$

f) Se adună toate coloanele la prima coloană și se dă factor comun pe coloana întâi. Se obține:

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}.$$

Se formează zerouri pe coloana întâi scăzând prima linie din celelalte linii. Se obține:

$$(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} c-b & a-c \\ a-b & b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)[-(c-b)^2 - (a-b)(a-c)] = (a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2).$$

E8. *Rezolvare:*

a) $\delta_{11} = (-1)^{1+1} d_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 21$

$\delta_{12} = (-1)^{1+2} d_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -40$

$\delta_{13} = (-1)^{1+3} d_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -52$

$\delta_{21} = (-1)^{2+1} d_{21} = -\begin{vmatrix} -9 & 10 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 59$

$\delta_{22} = (-1)^{2+2} d_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 120 = -112$

$\delta_{23} = (-1)^{2+3} d_{23} = -\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -148$

$\delta_{31} = (-1)^{3+1} d_{31} = \begin{vmatrix} -9 & 10 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -33$

$\delta_{32} = (-1)^{3+2} d_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 64$

$\delta_{33} = (-1)^{3+3} d_{33} = \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 84$

b) $d = -9 \cdot \delta_{12} + 6\delta_{22} + 5\delta_{32} = -9(-40) + 6(-112) + 5 \cdot 64 = 8$

$d = 12 \cdot \delta_{31} + 5 \cdot \delta_{32} + 1 \cdot \delta_{33} = 12(-33) + 5 \cdot 64 + 84 = 8$.

c) Înmulțim linia a doua cu –2 şi o adunăm la prima linie, apoi o înmulțim cu –3 şi o adunăm la a treia linie. Se obține:

$$\begin{vmatrix} 0 & -21 & 16 \\ 4 & 6 & -3 \\ 0 & -13 & 10 \end{vmatrix} = 0 \cdot \delta'_{11} + 4 \cdot \delta'_{21} + 0 \cdot \delta'_{31} = 4 \cdot \delta'_{21} = 4 \cdot (-1)^{2+1} d'_{21} = -4 \cdot \begin{vmatrix} -21 & 16 \\ -13 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(-210 + 208) = -4 \cdot (-2) = 8.$$

Sinteză

S1. *Rezolvare:*
Calculăm cei trei determinanți şi obținem:

$$(25 - 32) - 6(6 + 2 - 20 + 4) - 10 = 31.$$

S2. *Rezolvare:*
Calculăm determinanții şi obținem:

$$20\left(\frac{21}{20} - \frac{24}{15}\right) - (-3 + 1) + \frac{5}{3}(-18 + 20 + 10 + 3) = 14 \Leftrightarrow 16 = 14 \text{; fals.}$$

S3. *Rezolvare:*

a) Ecuația se scrie sub forma echivalentă:

$4x^2 + 8x - 5x - 15 = -14 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{4}$;

b) Ecuația este echivalentă cu:

$2x^2 + 2x - 3x^2 + 6x = -i^2 - (9 - i^2) \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 9$.

c) Se obține ecuația:

$2x^2 - 2x - 20 + 5x = -5x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow 7x^2 + 5x - 18 = 0$ cu soluțiile $x_1 = \frac{9}{7};\ x_2 = -2$;

d) Se obține succesiv:

$3^{x+2} - 36 = 2 \cdot 3^{x+1} - 3^x \Leftrightarrow 3^x(9 - 6 + 1) = 36 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$.

S4. *Rezolvare:*

a) Calculând determinanții se obține:

$$2x^2 + 1 + 1 - x - 2 - x = 315 + 6 - 28 - 126 - 15 + 28 \Leftrightarrow x^2 - x - 90 = 0$$

cu soluțiile $x_1 = 10$, $x_2 = -9$;

b) Calculând determinanții se obține:

$$-x^3 + 2 - x - (3x - x^3 + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

c) Ecuația este echivalentă cu:

$$-2(2x - 1) - 2(3x + 2) + 24 + 4 + 6(2x - 1) - 4(3x + 2) = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0,$$

cu soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 9$;

d) Pentru calcule mai restrânse aplicăm de câteva ori proprietăți ale determinanților pentru determinantul de ordin 3. De exemplu:

Scădem coloana întâi din celelalte şi se obține ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x+3 & 1 & 2 \\ 2x & -1 & -x-3 \end{vmatrix} = 5(x+1) - 4x$$

Scădem linia întâi din a doua şi o adunăm la a treia şi se obține:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3x & 0 & -x-1 \end{vmatrix} = x+5 \Leftrightarrow 3x+3 = x+5,$$

cu soluția $x = 1$.

S5. *Rezolvare:*

Calculând determinanții se obține ecuația:

$$x^3 - 6x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 5) = 0,$$

cu soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

Rezultă că $S = 126$.

S6. *Rezolvare:*

a) Se scade succesiv linia întâi din a doua şi a treia, obținându-se: $d = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 - a^2 & b - a & 0 \\ c^2 - a^2 & c - a & 0 \end{vmatrix}$.

Se dă factor comun $(b-a)$ şi $(c-a)$ de pe linia a doua, respectiv linia a treia şi se obţine:

$$d=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b+a & 1 & 0 \\ c+a & 1 & 0 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & 1 \\ c+a & 1 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(b-c);$$

b) Se scade coloana întâi din celelalte şi se obţine:

$$d=\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 1 & 2 \\ c & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ (două coloane sunt identice, deci } d=0\text{);}$$

c) Se scade linia întâi din celelalte apoi se dă factor comun pe linia a doua şi a treia. Se obţine succesiv:

$$d=\begin{vmatrix} a & a^2+1 & a+1 \\ b-a & b^2-a^2 & b-a \\ c-a & c^2-a^2 & c-a \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2+1 & a+1 \\ 1 & b+a & 1 \\ 1 & c+a & 1 \end{vmatrix}.$$

Se scade coloana întâi din a treia şi se obţin două zerouri pe coloana a treia:

$$d=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a & a^2+1 & 1 \\ 1 & b+a & 0 \\ 1 & c+a & 0 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b);$$

d) Se adună la prima linie celelalte linii obţinându-se:

$$d=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}=0 \text{ (o linie are toate elementele nule);}$$

e) Se scade coloana întâi din celelalte coloane, apoi se dă factor comun pe coloana a doua şi a treia şi se obţine:

$$d=\begin{vmatrix} x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \\ yz & xz-yz & xy-yz \end{vmatrix}=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \\ yz & -z & -y \end{vmatrix}.$$

Se scade coloana a doua din a treia şi se dă factor comun pe coloana a treia obţinându-se:

$$d=(y-x)(z-x)\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & y+x & z-y \\ yz & -z & z-y \end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z-y)\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & y+x & 1 \\ yz & -z & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(y-x)(z-x)(z-y)\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & y+x & 1 \\ yz-x^2 & -x-y-z & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(y-x)(z-x)(z-y)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & 1 \\ yz-x^2 & -x-y-z \end{vmatrix}=(x-y)(z-x)(z-y)(-xy-xz-yz)=$$

$$=(x-y)(x-z)(z-y)(xy+xz+yz);$$

f) Se scade coloana întâi din coloana a doua şi se adună la a treia şi apoi se formează două zerouri pe coloana a doua.

Avem:

$$d=\begin{vmatrix} a+1 & -2 & a^2+a \\ b+1 & -2 & b^2+b \\ c+1 & -2 & c^2+c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+1 & -2 & a^2+a \\ b-a & 0 & b^2-a^2+b-a \\ c-a & 0 & c^2-a^2+c-a \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+1 & -2 & a^2+a \\ 1 & 0 & b+a+1 \\ 1 & 0 & c+a+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & b+a+1 \\ 1 & c+a+1 \end{vmatrix}=2(b-a)(c-a)(c-b).$$

S7. *Rezolvare:*

Se adună linia a doua şi a treia la prima obţinându-se $d=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \end{vmatrix}$.

Se dă factor pe linia întâi apoi se fac zerouri pe aceasta. Avem succesiv:

$$d=(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-c-a & a+b+c & a+b+c \\ 2c & -a-b-c & 0 \end{vmatrix}.$$

Se dă factor pe coloana a doua şi a treia şi se obţine:

$$d=(a+b+c)^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-c-a & 1 & 1 \\ 2c & -1 & 0 \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

Aşadar egalitatea este verificată.

b) Se scade coloana întâi din celelalte şi se dă factor comun pe aceste coloane obţinându-se succesiv:

$$d=\begin{vmatrix} x+y & z-x & z-y \\ x^2+y^2 & z^2-x^2 & z^2-y^2 \\ x^3+y^3 & z^3-x^3 & z^3-y^3 \end{vmatrix}=(z-x)(z-y)\begin{vmatrix} x+y & 1 & 1 \\ x^2+y^2 & z+x & z+y \\ x^3+y^3 & z^2+xz+x^2 & z^2+zy+y^2 \end{vmatrix}.$$

Se formează un zerou pe linia întâi, scăzând coloana a doua din a treia.
Avem:

$$d=(z-x)(z-y)\begin{vmatrix} x+y & 1 & 0 \\ x^2+y^2 & z+x & y-x \\ x^3+y^3 & z^2+xz+x^2 & z(y-x)+(y^2+x^2) \end{vmatrix}=$$

$$=(z-x)(z-y)(y-x)\cdot\begin{vmatrix} x+y & 1 & 0 \\ x^2+y^2 & z+x & 1 \\ x^3+y^3 & z^2+xz+x^2 & x+y+z \end{vmatrix}=2xyz(z-x)(z-y)(y-x)=.$$

$$=2xyz(x-y)(y-z)(z-x)$$

S8. *Rezolvare:*

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Avem:

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bx & ab+by \\ ax+yx & bx+y^2 \end{pmatrix}$$

$$tr(A)\cdot A=(a+y)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+ay & ab+by \\ ax+yx & ay+y^2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = ay - bx.$$

Înlocuind în expresia $A^2 - \mathrm{tr}(A)\cdot A + \det(A)\cdot I_2$ se obține matricea O_2, ceea ce trebuie arătat.

S9. *Rezolvare:*

a) $d=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-4+1+0-0+8-3=2$

$t = \mathrm{tr}(A) = 1 + (-1) + 4 = 4$

b) $\delta_{11}=(-1)^{1+1}d_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-4-3=-7$

$\delta_{22}=(-1)^{2+2}d_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4$

$\delta_{33}=(-1)^{3+3}d_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1+2=1$

Rezultă că $s = -2$;

c) Avem:

$s_1=a_{13}\delta_{12}+a_{23}\delta_{22}+a_{33}\delta_{32}=1\cdot(-1)^{1+2}d_{12}+3(-1)^{2+2}d_{22}+4(-1)^{3+2}d_{32}=$

$=-1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}+3\cdot 4+4(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0$

d) Calculăm mai întâi A^2 și A^3 obținând:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & 46 \\ 4 & 14 & 86 \end{pmatrix}$$

Rezultă că:

$$A^3-t\cdot A^2+s\cdot A-d\cdot I_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & 46 \\ 4 & 14 & 86 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & -40 \\ -4 & -12 & -76 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, ceea ce trebuia găsit.

S10. *Rezolvare:*

a) $\det(A)=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0-4+6-8+6=0$.

$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ şi $\det(B) = 6 - 2 + 2 + 8 + 3 + 1 = 18$.

$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 0 & -9\\ 6 & 0 & 8\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}$ şi $\det(AB) = 0$, având o coloană cu elementele nule;

b) Evident, $0 = 0 \cdot 18$;

c) $s=b_{11}\delta_{31}+b_{12}\delta_{32}+b_{13}\delta_{33}=1\cdot(-1)^{3+1}\cdot d_{31}+(-1)(-1)^{3+2}d_{32}+(-2)\cdot(-1)^{3+3}d_{33}=$

$=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$.

Rezultatul corespunde proprietății P_{10}.

S11. *Rezolvare:*

a) Se adună coloana a treia la prima, se dă factor comun pe coloana întâi şi pe coloana a doua şi se obțin două coloane identice. Avem:

$$d=\begin{vmatrix}a+b+c & \sqrt{3} & c\\ a+b+c & \sqrt{3} & a\\ a+b+c & \sqrt{3} & b\end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot\sqrt{3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & c\\ 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & b\end{vmatrix}=0.$$

b) Se adună coloana a treia la prima şi se obțin două coloane proporționale, factorul de proporționalitate fiind $(a-b)$;

c) Se scade coloana întâi din a doua şi se vor obține coloane proporționale. Avem:

$$d=\begin{vmatrix}a^2 & (b+c)^2-a^2 & b+c-a\\ b^2 & (a+c)^2-b^2 & a+c-b\\ c^2 & (a+b)^2-c^2 & a+b-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2 & (a+b+c)(b+c-a) & (b+c-a)\\ b^2 & (a+b+c)(a+c-b) & a+c-b\\ c^2 & (a+b+c)(a+b-c) & a+b-c\end{vmatrix}=0.$$

2.2. Aplicații ale determinanților în geometrie

Exersare

E1. *Rezolvare:*

Ecuația dreptei AB are forma: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, echivalentă cu $7x + 3y - 2 = 0$.

Punctele $A(2, -4)$, $B(-1, 3)$, $C(5, -11)$ sunt coliniare dacă $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Calculând determinantul se obține că este nul, deci punctele sunt coliniare.

E2. *Rezolvare:*

a) Avem: $\begin{vmatrix} -1 & -9 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 36 + 12 + 18 + 1 = 0$.

Rezultă că A, B, C sunt coliniare.

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 5 - 3 + 1 + 3 - 10 = -6 \neq 0$.

Rezultă că punctele M, N, P sunt necoliniare;

c) $\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 12 - 6 + 4 + 12 = 0$.

Aşadar E, F, G sunt puncte coliniare;

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ m & 2m-5 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6m - 15 - m - m + 3 - 4m + 10 = 0$.

Rezultă că punctele T, U, V sunt coliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

E3. *Rezolvare:*

a) Ecuația dreptei AC are forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8x + y - 13 = 0;$$

b) Punem condiția de coliniaritate a trei puncte:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ m+1 & 2m & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2};$$

c) Folosind formula ariei unei suprafețe triunghiulare cu ajutorul determinantului se obține egalitatea:

$$\frac{1}{2}\cdot|\Delta| = 22,5 \text{, unde } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ m+1 & 2m & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aşadar, $\frac{1}{2}\cdot|10m-5| = 22,5$ sau încă, $|10m-5| = 45$.

Rezultă că $10m - 5 = 45$ şi $m = 5$ sau $10m - 5 = -45$ şi $m = -4$.
În concluzie, există două triunghiuri ABC în condițiile problemei.

E4. *Rezolvare:*

a) $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+4y+11=0$

$AC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+2y+7=0$

$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+6y+19=0;$

- $d(A, BC) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $A(-3, -2)$; $BC: x+6y+19=0$;
- $d(A, BC) = \frac{|-3+6\cdot(-2)+19|}{\sqrt{1^2+6^2}} = \frac{4}{\sqrt{37}}$;
- $d(B, AC) = \frac{|5+2(-4)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$;
- $d(C, BA) = \frac{|-1+4(-3)+11|}{\sqrt{1^2+4^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$.

c) $\mathscr{A}_{(ABC)} = \frac{1}{2}\cdot|\Delta|$,unde $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -4$.

Rezultă că $\mathscr{A}_{(ABC)} = 2$.

E5. *Rezolvare:*

a) $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y=2$

$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+y-10=0$

$$CD: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 4$$

$$AD: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0;$$

b) $$AC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 8 = 0$$

$$BD: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - 26 = 0;$$

c) $$d(A, BD) = \frac{|2\cdot 1 + 5\cdot 2 - 26|}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$$

$$d(C, BD) = \frac{|2\cdot 6 + 5\cdot 4 - 26|}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{6}{\sqrt{29}}.$$

Rezultă că $\frac{14}{\sqrt{29}} > \frac{6}{\sqrt{29}}$, adică $d(A, BD) > d(C, BD)$;

d) $A_{(ABCD)} = A_{(ABC)} + A_{(ACD)}$

$$A_{(ABC)} = \frac{1}{2}\cdot|\Delta_1|, \text{ unde } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 14.$$

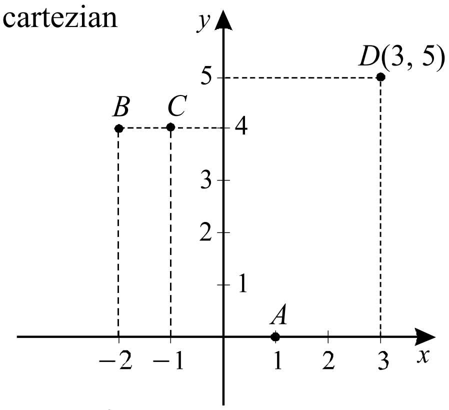
$$A_{(ACD)} = \frac{1}{2}|\Delta_2|, \text{ unde } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Se obține $A_{(ABCD)} = 10$.

Sinteză

S1. *Rezolvare:*

a) Reprezentăm punctele într-un reper cartezian



$$AB:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x+3y-4=0$$

$$BC:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y=4$$

$$CD:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-4y+17=0$$

$$CA:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x+y-2=0;$$

b) $d(B,\ AC) = \dfrac{|2\cdot(-2)+4-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$d(D,\ AC) = \dfrac{|2\cdot 3+5-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$;

c) $A_{(ABD)} = \dfrac{1}{2}|\Delta_1|$, unde $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -23$. Rezultă că $A_{(ABD)} = \dfrac{23}{2}$.

$A_{(BCD)} = \dfrac{1}{2}\cdot|\Delta_2|$, unde $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Rezultă că $A_{(BCD)} = \dfrac{1}{2}$.

$A_{(COD)} = \dfrac{1}{2}\cdot|\Delta_3|$, unde $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = +17$. Rezultă că $A_{(COD)} = \dfrac{17}{2}$.

În concluzie, $A_{(BCD)} < A_{(COD)} < A_{(ABD)}$.

d) Din condiția M, B, C sunt coliniare rezultă:

$\begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, rezultă $m = 2$ şi $M(2, 4)$.

$A_{(MAD)} = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3$.

Rezultă că $A_{(MAD)} = \dfrac{3}{2}$.

S2. *Rezolvare:*
Din condiția de coliniaritate a trei puncte se obține:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^x & 2^{x+1}-2 & 1 \\ 2^{x+1}-2 & 2^x & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

relație echivalentă cu $3 \cdot (2x)^2 - 10 \cdot 2^x + 8 = 0$
cu soluțiile: $2^x = 2$ şi $2^x = \frac{4}{3}$.

Rezultă că $x \in \left\{1, \log_2 \frac{4}{3}\right\}$.

S3. *Rezolvare:*

$A_{(AOB)} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin^2 a & \cos^2 a & 1 \\ \sin^2 b & \cos^2 b & 1 \end{vmatrix} = \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 b \cdot \cos^2 a =$$

$$= (\sin a \cos b - \sin b \cos a) \cdot (\sin a \cos b + \sin b \cos a) = \sin(a-b) \cdot \sin(a+b).$$

Rezultă că $A_{(AOB)} = \frac{1}{2} \cdot |\sin(a-b) \cdot \sin(a+b)|$.

b) Revinde la a studia că punctele sunt coliniare, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & 1 \\ \sin^2 b & \cos^2 b & 1 \\ \sin^2 c & \cos^2 c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 a - 1 & \cos^2 a & 1 \\ \sin^2 b - 1 & \cos^2 b & 1 \\ \sin^2 c - 1 & \cos^2 c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos^2 a & \cos^2 a & 1 \\ -\cos^2 b & \cos^2 b & 1 \\ -\cos^2 c & \cos^2 c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(două coloane sunt proporționale).

Aşadar, punctele A, B, C sunt coliniare, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

S4. *Rezolvare:*
a) Punem condiția ca punctele A, B, C să fie coliniare:

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ m+1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$$

cu soluțiile $m_1 = 1$, $m_2 = 2$;

b) $A_{(ABC)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |\Delta| = 1$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ m+1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2$.

Rezultă că $\frac{1}{2} \cdot \left|-m^2 + 3m - 2\right| = 1 \Leftrightarrow \left|m^2 - 3m + 2\right| = 2$.

Semnul expresiei $m^2 - 3m + 2$ este dat în următorul tabel de semn:

m	1 2
$m^2 - 3m + 2$	+ + + 0 – – 0 + + + +

Pentru $m \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ ecuația 1 devine: $m^2 - 3m = 0$, cu soluțiile $m_1 = 0$, $m_2 = 3$.

Pentru $m \in (1, 2)$ ecuația 1 devine: $-m^2 + 3m - 2 = 2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 = 0$ care nu are soluții reale.

Aşadar, $m \in \{0, 3\}$.

S5. *Rezolvare:*

Calculăm $A_{(AOB)} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$ $\Delta = \begin{vmatrix} m & 2m-1 & 1 \\ m+1 & -m+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3m^2 + m + 1$.

Condiția din enunț se scrie sub forma:

$$\frac{1}{2} \cdot \left|-3m^2 + m + 1\right| = \frac{23}{2} \Leftrightarrow \left|3m^2 - m - 1\right| = 23.$$

Tabelul de semn al expresiei $3m^2 - m - 1$ este

m	$-\infty \qquad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \qquad \frac{1+\sqrt{13}}{2} \qquad +\infty$
$3m^2 - m - 1$	$+ + + + \; 0 - - - - - - 0 + + + +$

Pentru $m \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$ ecuația 2 devine: $3m^2 - m - 24 = 0$ cu soluțiile $m_1 = -\frac{8}{3}$; $m_2 = 3$.

Pentru $m \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ ecuația (2) devine:

$$-3m^2 + m + 1 = 23 \Leftrightarrow 3m^2 - m + 22 = 0,$$

care nu are soluții reale.

Aşadar, $m \in \left\{-\frac{8}{3}, 3\right\}$.

S6. *Rezolvare:*

a) Avem relația $\begin{vmatrix} m-1 & 3 & 1 \\ 2m & -m & 1 \\ 2m-3 & 1+m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2, 2\}$;

b) Avem condiția: $\begin{vmatrix} m-m & 1+m & 1 \\ 2m-n & 1 & 1 \\ m & n+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2mn - m^2 = 0 \Leftrightarrow m(2n-m) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ sau $m = 2n$, $n \in \mathbb{R}$.

S7. *Rezolvare:*

$$BC : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & \frac{2-6m}{1-m} & 1 \\ 1 & \frac{7m-1}{m-1} & 1 \end{vmatrix} = 0,\ m \neq 1 \Leftrightarrow (m+1)x + (1-m)y + 6m - 2 = 0,\ m \neq 1.$$

$$d(A, BC) = 3 \Leftrightarrow \frac{|m+1+1-m+6m-2|}{\sqrt{(m+1)^2 + (1-m)^2} = 3} = 3 \Leftrightarrow |6m| = 3\sqrt{2m^2+2}.$$

Ridicând la pătrat se obține ecuația $m^2 = 1$, $m \neq 1$ cu soluția $m = -1$.

S8. *Rezolvare:*

Fie M(α, β) situat pe dreapta de ecuație $x - y - 3 = 0$. Rezultă că $\alpha - \beta - 3 = 0$.

Egalitatea $A_{(OAM)} = A_{(OBM)}$ se scrie sub forma: $\frac{1}{2} \cdot |\Delta_1| = \frac{1}{2}|\Delta_2|$ unde:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 3\beta - 2\alpha \quad \text{şi} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 2\beta - 4\alpha .$$

Rezultă că $|3\beta - 2\alpha| = |2\beta - 4\alpha|$ şi $\alpha - \beta - 3 = 0$.

Înlocuind $\alpha = \beta + 3$, ecuația cu moduli devine: $|\beta - 6| = |2\beta + 12|$ (*)

Tabelul de semn al expresiile din moduli este:

β	$-\infty$ $\quad -6 \quad 6 \qquad +\infty$
$\beta - 6$	$- - - - - - - - 0 + + + + + + + +$
$2\beta + 12$	$- - - - 0 + + + + + + + + + + +$

- Pentru $\beta \in (-\infty, -6]$ ecuația (*) devine:

  $-\beta + 6 = -2\beta - 12$, cu soluția $\beta = -18 \in (-\infty, -6]$
- Pentru $\beta \in (-6, 6)$ ecuația (*) devine:

  $-\beta + 6 = 2\beta + 12$, cu soluția $\beta = -2 \in (-6, 6)$
- Pentru $\beta \in [6, +\beta)$ se obține ecuația:

  $\beta - 6 = 2\beta + 12$, cu soluția $\beta = -18 \notin [6, +\infty)$.

Aşadar există două puncte cu proprietatea din enunț: $M_1(-15, -18)$, $M_2(+1, -2)$.

S9. *Rezolvare:*

$$\mathscr{A}_{(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1 .$$

Condiția din problemă se scrie sub forma:

$$\frac{1}{2} \cdot \left|-m^2 + 2m - 1\right| = 2 \Leftrightarrow \left|m^2 - 2m + 1\right| = 4 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 ,$$

ecuație care are soluțiile $m_1 = -1$, $m_2 = 3$.

TESTE DE EVALUARE

TESTUL 1

1. *Rezolvare:*
Calculăm determinanții și obținem:
$E=\frac{1}{2}(12+10)-5(1+4-6+10)+36=2$. Rezultă că răspunsul corect este b).

2. *Rezolvare:*

$$\text{a) } \det(A)=\begin{array}{c}\begin{vmatrix}2&-1&3\\-1&4&-5\\4&-1&3\end{vmatrix}\\ \begin{matrix}2&-1&3\\-1&4&-5\end{matrix}\end{array}=48+6+20-48-20-6=0.$$

$$\text{c) } \det(A)=-1\cdot\delta_{21}+4\cdot\delta_{22}-5\cdot\delta_{23}=(-1)\cdot(-1)^{2+1}d_{21}+4\cdot(-1)^{2+2}d_{22}-5\cdot(-1)^{2+3}d_{23}=$$
$$=\begin{vmatrix}-1&3\\-2&6\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\4&-2\end{vmatrix}=(-6+6)+4(12-12)+5(-4+4)=0.$$

$$\text{d) } \det(A)=(-1)\delta_{12}+4\cdot\delta_{22}-2\cdot\delta_{32}=(-1)(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1&-5\\4&6\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}-2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&3\\-1&-5\end{vmatrix}=$$
$$=-6+20+4(12-12)+2(-10+3)=14-14=0;$$

e) Înmulțim succesiv linia a doua cu 2 și 4 și o adunăm la prima, respectiv a treia linie.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}0&7&-7\\-1&4&-5\\0&14&-14\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}7&-7\\14&-14\end{vmatrix}=0;$$

f) Coloana a treia este o combinație liniară a celorlalte două coloane:

$$3=2+(-1)\cdot(-1);\ -5=-1+4(-1);\ 6=4+(-2)(-1).$$

Rezultă că det (A) = 0.

3. *Rezolvare:*

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix}x+3&2x-1\\x+4&x\end{vmatrix}=-x^2-4x+4$$

$$C^2=\begin{pmatrix}x&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+2&x+3\\2x+6&2+9\end{pmatrix}$$

$$\det(C^2)=\begin{vmatrix}x^2+2&x+3\\2x+6&11\end{vmatrix}=9x^2-12x+4.$$

Ecuația $\det(A+B)=\det(C^2)$ este echivalentă cu:

$$-x^2-4x+4=9x^2-12x+4\Leftrightarrow 10x^2-8x=0 \text{ cu soluțiile } x_1=0,\ x_2=\frac{4}{5}.$$

Rezultă că suma soluțiilor ecuației este $\frac{4}{5}$.

4. *Rezolvare:*

$$\begin{vmatrix} 2m+1 & 3 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 15 = 0,$$

cu soluțiile $m_1 = -3,\ m_2 = \frac{5}{2}$.

TESTUL 2

1. *Rezolvare:*

Rezolvăm ecuația a). Avem succesiv:

$$-3(x-4) - 5(1-3x) - \frac{2}{3}(56+4) = \frac{3}{2}(-5-5) \Leftrightarrow 12x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Aşadar $S_1 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Ecuația b) se scrie sub forme echivalente astfel:

$y(y-1)(y+4) - y - 1 - 3(y+2)(y+5) - (y^2-1)(y+2) + y(y+5) + 3(y+4) = 4y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5y^2 + 19y + 18 = 0$ cu mulțimea soluțiile $S_2 = \left\{-2, -\frac{9}{5}\right\}$.

Aşadar, $S_1 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $S_2 = \left\{-2, -\frac{9}{2}\right\}$, $S_1 \cup S_2 = \left\{\frac{3}{2}, -2, -\frac{9}{5}\right\}$, $S_1 \times S_2 = \left\{\left(\frac{3}{2}, -2\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{5}\right)\right\}$.

2. *Rezolvare:*

Soluția ε a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ are proprietatea că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ şi $\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0$, de unde se obține $\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon = 1$.

$$\det(A) = -\varepsilon^3 - \varepsilon^3 - \varepsilon^3 - \varepsilon^6 + \varepsilon^3 - 1 = -4$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2\varepsilon^2 & 2\varepsilon^2 \\ 2\varepsilon^2 & 0 & 2\varepsilon^2 \\ 2\varepsilon^2 & 2\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } \det\left(\frac{1}{2}\cdot A^2\right) = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon^6 + \varepsilon^6 = 2.$$

Rezultă că $\det(A) + \det\left(\frac{1}{2}A^2\right) = -4 + 2 = -2$.

3. *Rezolvare:*

Avem: $\det(A) = -abz - cyz + z^2x = z(xz - ab - cy)$

$\det(B) = ab^2 + bcy - bxy = b(ab + cy - xz)$

$\det(C) = -xyz + aby + cy^2 = y(-xz + ab + cy)$.

Rezultă că

$n = xz(-ab - cy + xz) + ab(ab + cy - xz) + yc(-xz + ab + cy) = (ab + cy - xz)(-xy + ab + yc) =$
$= (ab + cy - xz)^2$.

4. Ecuația dreptei AB este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\frac{2m}{3} & 1 & 1 \\ 3-m & -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{m}{6} + y(3-m) - 3 + m + \frac{2m}{3} \cdot y + \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x + (36-4m)y + (14m-36) = 0$$

$d(C,\ AB) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|15 + 2(36-4m) + 14m - 36|}{\sqrt{225+(36-4m)^2}} = 3,\ m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |6m+51| = 3 \cdot$
$\cdot\sqrt{225+(36-4m)^2},\ m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |2m+17| = \sqrt{225+(36-4m)^2},\ m \in \mathbb{Z}$.

După ridicare la pătrat se obține ecuația de gradul doi: $6m^2 - 178m + 616 = 0$ cu soluția întreagă $m = 4$.

Capitolul III. Sisteme de ecuații liniare
3.1. Matrice inversabile din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Exersare

E1. *Rezolvare:*

O matrice pătratică este inversabilă dacă şi numai dacă determinantul ei este nenul.

a) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6-20=-26\neq 0$; matricea $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ este inversabilă;

b) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -14+15=1\neq 0$; matricea $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ este inversabilă;

c) $\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 10+6=16\neq 0$; matricea $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ este inversabilă;

d) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1+1=2\neq 0$; matricea $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ este inversabilă.

E2. *Rezolvare:*

Vom folosi formula: $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*$.

a) $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = -10+8=-2\neq 0$

${}^tA=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$, unde δ_{ij} sunt complemenții algebrici ai elementelor a_{ij} ale matricei transpuse ${}^tA$.

Aşadar, $A^*=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ şi $A^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A)=\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = 2-4=-2\neq 0$.

${}^tA=\begin{pmatrix} -8 & \frac{2}{3} \\ 6 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ şi $A^*=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -6 \\ -\frac{2}{3} & -8 \end{pmatrix}$.

Rezultă că $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -6 \\ -\frac{2}{3} & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 3 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}$

c) $\det(A)=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\neq 0$; ${}^tA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Rezultă că $A^{-1}=-A^*=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\det A=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3}\end{vmatrix}=9-4=5\neq 0$; ${}^{t}A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 3\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$A^{*}=\begin{pmatrix}3\sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ şi $A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$

e) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, ${}^{t}A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ şi

$A^{-1}=-A^{*}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

f) $\det A=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -5\end{vmatrix}=10$; ${}^{t}A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}$, $A^{*}=\begin{pmatrix}5 & 5 & 7\\ 0 & -10 & -8\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ şi $A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot A^{*}$.

g) $\det(A)=\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=-18-4+12=-10$

${}^{t}A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $A^{*}=\begin{pmatrix}-2 & -6 & -4\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 4 & 6\end{pmatrix}$ şi $A^{-1}=-\frac{1}{10}\cdot A^{*}$

h) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=8+3-6-2=3$, ${}^{t}A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $A^{*}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ -1 & -1 & 3\\ 4 & 1 & -6\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot A^{*}$.

E3. *Rezolvare:*
Pentru fiecare matrice se pune condiția ca determinantul să fie nenul.

a) $\begin{vmatrix}2 & m\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-12-3m\neq 0\Rightarrow m\neq -4\Rightarrow m\in\mathbb{C}\setminus\{-4\}$;

b) $\begin{vmatrix}m & 5\\ -20 & m\end{vmatrix}=m^2+100\neq 0\Rightarrow m\neq\pm 10i\Rightarrow m\in\mathbb{C}\setminus\{-10i, 10i\}$;

c) $\begin{vmatrix}m-3 & 7\\ 2 & m+2\end{vmatrix}=m^2-m-20\neq 0$.

Dacă $m^2 - m - 20 = 0 \Rightarrow \Delta = 81$ şi $m_{1,2}\in \{-4, 5\}$.
Rezultă că matricea este inversabilă dacă $m\in \mathbb{C}\setminus\{-4, 5\}$.

d) $\begin{vmatrix}m^2-3m & m\\ m-3 & 1\end{vmatrix}=(m-3)\begin{vmatrix}m & m\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$, $\forall m\in\mathbb{C}$. Rezultă că $m\in\Phi$.

e) $\begin{vmatrix} m & m+1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 3m^2+2m-1 \neq 0$.

Dacă $3m^2+2m-1=0 \Rightarrow m \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$.

Rezultă că matricea este inversabilă dacă $m \in \mathbb{C} \setminus \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$.

f) $\begin{vmatrix} m^2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ m^2 & 11 & 9 \end{vmatrix} = -6m^2-6 \neq 0$.

Dacă $-6m^2 - 6 = 0 \Rightarrow m \in \{-i, i\}$.

Rezultă că matricea este inversabilă pentru $m \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

g) $\begin{vmatrix} 2+m & 1 & 1 \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m^2-3m = m(m-3) \neq 0$.

Rezultă că $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 3\}$.

h) $\begin{vmatrix} \frac{3m+1}{2} & -1 & 7 \\ 4 & 9 & \frac{m-7}{2} \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(3m^2+354m-357) \neq 0$.

Dacă $3m^2 + 354m - 357 = 0$, împărțind cu 3 rezultă ecuația $m^2 + 118m - 119 = 0$ pentru care

$$\Delta = 118^2 - 476 = 14400.$$

Se obține $m_1 = 1$, $m_2 = -19$.

Aşadar, matricea este inversabilă pentru $m \in \mathbb{C} \setminus \{1, -19\}$.

E4. *Rezolvare:*

a) $\det(A) = -2 \neq 0$; $\det(B) = -1 \neq 0$.

$\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \cdot \det(B) = 2 \neq 0$.

Rezultă că matricele A, B, AB, BA sunt inversabile.

- ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ şi $A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot A^* = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- ${}^tB = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = -B^* = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(AB) = 2$

${}^t(AB) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(AB)^* = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

• $BA=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & 64\\ -11 & 26\end{pmatrix}$, $\det(BA)=2$

${}^{t}(BA)=\begin{pmatrix}-27 & -11\\ 64 & 26\end{pmatrix}$, $(BA)^{*}=\begin{pmatrix}26 & -64\\ 11 & -27\end{pmatrix}$

Rezultă că $(BA)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot(BA)^{*}=\begin{pmatrix}13 & -32\\ \frac{11}{2} & -\frac{27}{2}\end{pmatrix}$

b) Se verifică prin calcul, folosind rezultatele de la punctul a)

c) • $A^{2}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 18\\ -36 & 92\end{pmatrix}$

$\det A^{2}=(\det A)^{2}=4$; ${}^{t}(A^{2})=\begin{pmatrix}-7 & -36\\ 18 & 92\end{pmatrix}$

$(A^{2})^{*}=\begin{pmatrix}-2 & -18\\ 36 & -7\end{pmatrix}$.

Rezultă că $(A^{2})^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}92 & -18\\ 36 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & -\frac{9}{2}\\ 9 & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}$

$$(A^{-1})^{2}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & -\frac{9}{2}\\ 9 & -\frac{7}{4}\end{pmatrix}.$$

Aşadar, $(A^{2})^{-1}=(A^{-1})^{2}$.

• $B^{2}=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64 & 45\\ 27 & 19\end{pmatrix}$; $\det(B^{2})=(\det(B))^{2}=1$.

${}^{t}(B^{2})=\begin{pmatrix}64 & 27\\ 45 & 19\end{pmatrix}$, $(B^{2})^{*}=\begin{pmatrix}19 & -45\\ -27 & 64\end{pmatrix}$.

Rezultă că $(B^{2})^{-1}=(B^{2})^{*}$.

$$(B^{-1})^{2}=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -45\\ -27 & 64\end{pmatrix}$$

Aşadar, $(B^{2})^{-1}=(B^{-1})^{2}$.

E5. *Rezolvare:*
Se foloseşte formula $(A^{-1})^{-1}=A$.

a) Determinăm inversa matricei $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 8\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$\det(A^{-1})=-\frac{5}{2}+12=\frac{19}{2}$.

${}^{t}(A^{-1})=\begin{pmatrix}-5 & -\frac{3}{2}\\ 8 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $(A^{-1})^{*}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -8\\ \frac{3}{2} & -5\end{pmatrix}$.

Rezultă că $(A^{-1})^{-1} = A = \frac{2}{19} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -8 \\ \frac{3}{2} & -5 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A^{-1}) = -2$; ${}^t(A^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(A^{-1})^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ şi $(A^{-1})^{-1} = A = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) $\det(\mathrm{A}^{-1}) = 1$; ${}^t(A^{-1}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

$(A^{-1})^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$ şi $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$

d) $\det A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{25} \cdot (-5) = -\frac{1}{5}$.

${}^t(A^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{11}{5} & -2 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{7}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{vmatrix}$; $(A^{-1})^* = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Rezultă că $(A^{-1})^{-1} = A = -5(A^{-1})^* = \begin{pmatrix} +2 & +1 & +3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Sinteză

S1. *Rezolvare:*

a) $\begin{vmatrix} 2^x & 5^x \\ 4^x & 10^x \end{vmatrix} = 20^x - 20^x = 0$ Rezultă că matricea $\begin{pmatrix} 2^x & 5^x \\ 4^x & 10^x \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

b) $\begin{vmatrix} \lg 1 & 2 \\ -2 & \lg 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & \lg 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Rezultă că matricea $\begin{pmatrix} \lg 1 & 2 \\ -2 & \lg 5 \end{pmatrix}$ este inversabilă.

c) $\begin{vmatrix} 0! & 3 \\ 8 & 4! \end{vmatrix} = 4! - 24 = 0$. Matricea $\begin{pmatrix} 0! & 3 \\ 8 & 4! \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

d) $\begin{vmatrix} C_4^2 & A_3^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 \neq 0$;

Rezultă că matricea $\begin{pmatrix} C_4^2 & A_3^2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă.

S2. *Rezolvare:*

a) $A=\begin{pmatrix} i & -i^2 \\ 3 & -4i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & -4i \end{pmatrix}$

det(A) = $-4i^2 - 3 = 4 - 3 = 1$.

${}^tA=\begin{pmatrix} i & 3 \\ 1 & -4i \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} -4i & -1 \\ -3 & i \end{pmatrix}$.

Rezultă că $A^{-1} = A^*$.

b) $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{3} & 1-i \\ 1+i & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{pmatrix}$; det$A$ = $(3 - 2) - (1 - i^2) = -1$.

${}^tA=\begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{3} & 1+i \\ 1-i & \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{2} & -1+i \\ -1-i & \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Rezultă că $A^{-1} = -A^*$.

c) $A=\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$, det$A$ = $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

${}^tA=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$ iar $A^*=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

Rezultă că $A^{-1} = A^*$.

d) $A=\begin{pmatrix} -1 & C_m^2 & C_m^1 \\ 4 & -3 & 5 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$\det(A)=\frac{21}{4}(-m^2+3m+4)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$.

Din det(A) = 0, rezultă că $m = 4$.

Aşadar, A este inversabilă dacă şi numai dacă $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 4\}$ şi $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*$.

S3. *Rezolvare:*

Pentru fiecare matrice A punem condiţia ca det(A) $\neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) det$A$ = $(m - 1)x^2 - 2x + 2m - 3$.

Punem condiţia ca $(m - 1)x^2 - 2x + 2m - 3 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că discriminantul Δ al ecuaţiei $(m - 1)x^2 - 2x + 2m - 3 = 0$ este număr negativ.

Aşadar $4 - 4(m - 1)(2m - 3) < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 > 0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\cup(2, +\infty)$.

b) det$A \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1 - m)x^2 - x - 3m + 2 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4(1 - m)(2 - 3m) < 0$.

Se obţine inecuaţia de gradul doi $12m^2 - 20m + 7 > 0$ cu mulţimea soluţiilor

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{6}; +\infty\right)$.

c) det$A \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m + 2)x + 7 - 4m \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m + 2 = 0$ şi $7 - 4m \neq 0$.

Rezultă că $m = -2$.

S4. *Rezolvare:*

Condiţia $A^* = A^{-1}$ este echivalentă cu faptul că det(A) = 1.

a) $\det(A) = 1 \Leftrightarrow -2m - 13 = 1 \Leftrightarrow m = -7$;

b) $\det(A) = 1 \Leftrightarrow 2m^2 - 17m + 9 = 1 \Leftrightarrow m \in \left\{\frac{1}{2}; 8\right\}$;

c) $\det(A) = 1 \Leftrightarrow 10m - 1 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$;

d) $\det(A) = 1 \Leftrightarrow -2 \cdot 4^m + 3 \cdot 2^m + 3 = 1 \Leftrightarrow -2 \cdot 4^m + 3 \cdot 2^m + 2 = 0$.

Notăm $2^m = y$ şi se obține ecuația de gradul al doilea: $-2y^2 + 3y + 2 = 0$ cu soluțiile:

$y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{1}{2}$.

Revenind la notație se obține $m = 1$.

S5. *Rezolvare:*

a) Pornim de la ipoteza $AB = BA$. Înmulțim egalitatea matriceală cu B^{-1}, pe partea dreaptă şi obținem:

$ABB^{-1} = BAB^{-1} \Leftrightarrow A = BAB^{-1}$. Înmulțim această egalitate în partea stângă cu B^{-1} şi obținem: $B^{-1}A = B^{-1}BAB^{-1} \Leftrightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Înmulțim egalitatea $AB = BA$, în partea stângă, cu A^{-1} şi obținem:

$$A^{-1}AB = A^{-1}BA \Leftrightarrow B = A^{-1}BA.$$

Înmulțim această ultimă egalitate în partea dreaptă cu A^{-1} şi se obține $BA^{-1} = A^{-1}B$, ceea ce trebuia arătat.

c) În egalitatea de la a) înmulțim în stânga cu A^{-1} şi se obține $B^{-1} = A^{-1}B^{-1}A$.

Înmulțim acum cu A^{-1} în dreapta şi obținem $B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

S6. *Rezolvare:*

a) $(I_3 - A)(I_3 + A) = I_3^2 + I_3A - AI_3 - A^2 = I_3 - A^2 = I_3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = I_3 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3$.

b) Deoarece $(I_3 - A)(I_3 + A) = (I_3 + A)(I_3 - A) = I_3$, rezultă că $I_3 - A$ este inversabilă şi $(I_3 - A)-1 = (I_3 + A)$.

Observație.

Se poate deduce prin calcul că $I_3 - A$ este inversabilă şi apoi i se determină inversa după regula cunoscută $\left(B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^*\right)$.

3.2. Ecuații matriceale

Exersare

E1. *Rezolvare:*

a) Ecuația este de forma $XA = B$ unde $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Deoarece $\det(A) = -1$, rezultă că A este inversabilă și ecuația matriceală dată este echivalentă cu $X = B \cdot A^{-1}$.

Dar $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=-\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Rezultă că $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -12 & 5\end{pmatrix}$.

b) Ecuația este de forma $XA = B$, unde $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Deoarece $\det(A) = -1$, rezultă că există A^{-1} și ecuația matriceală este echivalentă cu $X = BA^{-1}$.

Dar $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^{*}=-\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Rezultă că $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -12 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

c) Ecuația este de forma $AX = B$, unde $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Deoarece $\det(A) = -1$, rezultă că există A^{-1} și se obține soluția $X = A^{-1}B$.

Dar $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=-A^{*}=-\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

Rezultă că $X=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & +3\end{pmatrix}$.

d) Ecuația este de forma $A = BX$ unde $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}3i & 1\\ -5 & 2i\end{pmatrix}$.

Deoarece $\det(B) = -1$, rezultă că matricea B este inversabilă și

$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot B^{*}=-B^{*}=-\begin{pmatrix}2i & -1\\ 5 & 3i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2i & 1\\ -5 & -3i\end{pmatrix}.$$

Rezultă că soluția ecuației este $X=B^{-1}A=\begin{pmatrix}-2i & 1\\ -5 & -3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4i-1 & -2i-1\\ -10+3i & -5+3i\end{pmatrix}$.

E2. *Rezolvare:*

a) Ecuația este de tipul $AXB = C$, unde $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ și $C = I_2$. Deoarece $\det(A) = 1$, $\det(B) = -1$, rezultă că există A^{-1} și B^{-1}, iar soluția ecuației matriceale este $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Dar $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=A^{*}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$ şi $B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot B^{*}=-B^{*}=-\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.

Rezultă că $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 11\\ 19 & -16\end{pmatrix}$.

b) Ecuaţia este de forma $A\cdot Y\cdot B=C$, unde $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 8 & -10\end{pmatrix}$.

Deoarece $\det(A)=-7$ şi $\det(B)=6$ rezultă că există A^{-1} şi B^{-1}, iar soluţia ecuaţiei matriceale este de forma: $Y=A^{-1}CB^{-1}$.

Dar $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot B^{*}=\frac{1}{6}B^{*}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Se obţine

$$Y=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 8\\ 8 & -10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{42}\begin{pmatrix}14 & -28\\ 14 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{42}\begin{pmatrix}42 & -42\\ 42 & 42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

c) Ecuaţia se scrie succesiv sub forme echivalente astfel:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 6 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 7 & -1\end{pmatrix}.$$

Ecuaţia s-a adus la forma $AXB=C$ unde $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 7 & -1\end{pmatrix}$.

Deoarece $\det(A)=1$, $\det(B)=-2$, rezultă că A şi B sunt inversabile şi soluţia ecuaţiei matriceale este de forma $X=A^{-1}CB^{-1}$.

Dar $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot B^{*}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Se obţine soluţia $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 6\\ 7 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 7 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 6\\ -13 & -\frac{19}{2}\end{pmatrix}$.

E3. *Rezolvare:*

a) Ecuaţia este de tipul $AX=B$.

Deoarece $\det(A)=3$, rezultă că există A^{-1} şi ecuaţia matriceală are soluţia $X=A^{-1}B$.

Dar ${}^{t}A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & -4 & -1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $A^{*}=\begin{pmatrix}10 & 7 & 2\\ 8 & 5 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}10 & 7 & 2\\ 8 & 5 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Rezultă că $X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}10 & 7 & 2\\ 8 & 5 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

b) Ecuaţia este de forma $X\cdot A=B$.

Deoarece $\det(A)=-1$, rezultă că există A^{-1} şi ecuaţia matriceală are soluţia $X=BA^{-1}$.

Dar ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Rezultă că $X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

c) Ecuaţia matriceală este de tipul $AXB=C$.
Avem: $\det(A)=-1$ şi $\det(B)=1$. Rezultă că matricele A şi B sunt inversabile, deci soluţia ecuaţiei matriceale se poate scrie sub forma $X=A^{-1}CB^{-1}$. Să calculăm A^{-1} şi B^{-1}.

• Avem ${}^tA=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\end{pmatrix}$ şi $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$.

• ${}^tB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B^{-1}=B^*$.

Rezultă că $X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -5 & -8\\ 0 & -6 & -9\\ 0 & 7 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}0 & -5 & 2\\ 0 & -6 & 3\\ 0 & 7 & -3\end{pmatrix}.$$

E4. *Rezolvare:*
a) Să calculăm $\det(A)$ şi $\det(B)$. Avem:
$\det(A)=2$ şi $\det(B)=-1$. Rezultă că matricele A şi B sunt inversabile, caz în care soluţia ecuaţiei matriceale se scrie sub forma $X=A^{-1}CB^{-1}$. Să determinăm A^{-1} şi B^{-1}.

Avem: ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ şi $A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot A^*$.

${}^tB=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B^*=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ şi $B^{-1}=-B^*=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

Rezultă că $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-15 & 11\\ 1 & -1\\ 6 & -4\end{pmatrix}$.

b) Deoarece A şi B sunt matrice inversabile, soluţia ecuaţiei matriceale $BXA={}^tC$ este $X=B^{-1}\cdot{}^tC\cdot A^{-1}$, adică

$$X=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -4 & 3\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -9 & 16\\ 1 & 7 & -12\end{pmatrix}.$$

3.4. Metode de rezolvare a sistemelor liniare

Exersare

E1. *Rezolvare:*
Matricele asociate sistemului de ecuații sunt:

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

e) Sistemul se aduce la forma cea mai simplă: $\begin{cases} 4x+y-z=1 \\ (1-i)x-y+3z=-2 \\ (i-2)x-iy+z=-2 \end{cases}$

Matricele asociate sunt: $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1-i & -1 & 3 \\ i-2 & -i & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

f) Forma simplă a sistemului este: $\begin{cases} 3x-4y-3z=-11 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$

Matricele asociate sistemului sunt: $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

E2. *Rezolvare:*
a) • Verificăm dacă perechea (–3, –2) este soluție a sistemului înlocuind $x=-3$, $y=-2$.

Obținem: $\begin{cases} -6-2=-8 \text{ (adevărat)} \\ 9+8=10 \text{ (fals)} \end{cases}$

Rezultă că (–3, –2) nu e soluție a sistemului de ecuații.

• Verificăm dacă perechea (–2, –4) este soluție, înlocuind $x=-2$, $y=-4$.

Obținem: $\begin{cases} -4-4=-8 \text{ (adevărat)} \\ -6+16=10 \text{ (adevărat)} \end{cases}$

Rezultă că perechea (–2, –4) este soluție a sistemului de ecuații.

• Verificăm dacă perechea (–6, 2) este soluție.

Obținem: $\begin{cases} -12+2=-8 \text{ (fals)} \\ -18-8=10 \text{ (fals)} \end{cases}$.

Rezultă că (–6, 2) nu este soluție.

• Verificăm dacă perechea (i, 1) este soluție.

Obținem: $2i + 1 = -8$ (fals).

Rezultă că (i, 1) nu este soluție.

b) Se verifică pe rând fiecare pereche dacă este soluție înlocuind pe x cu primul număr şi pe y cu al doilea număr al perechii.

Pentru acest sistem verifică perechea (–6, 2).

c) Soluția este perechea (i, 1).

d) Soluția este perechea (i, 1).

E3. *Rezolvare:*

a) Se înlocuie $x = 1$ şi $y = -2$ şi se obține succesiv

$$\begin{cases} a+3+6=8 \\ 4-(2b+3)\cdot(-2)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ 4b+10=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

b) Se înlocuie $x=-\frac{7}{4}$, $y=-5$ şi obținem succesiv:

$$\begin{cases} (a+3)\left(-\frac{7}{4}\right)+15=8 \\ -7+5(2b+3)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{4}(a+3)=-7 \\ 5(2b+3)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3=4 \\ 2b+3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

E4. *Rezolvare:*

a) Forma matriceală a sistemului de ecuații este:

$$AX=B, \text{ unde } A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Deoarece $\det(A)=-1 \neq 0$, matricea A este inversabilă şi soluția ecuației matriceale este: $X=A^{-1}B$.

Dar $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*=-A^*=-\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Se obține soluția $X=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aşadar, soluția sistemului este perechea de numere reale (1, –1).

b) Forma matriceală a sistemului de ecuații este: $AX = B$, unde

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\det(A) = 1$, matricea A este inversabilă şi soluția ecuației matriceale este $X=A^{-1}B$.

Dar $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*=A^*=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezultă că $X = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aşadar, soluția sistemului de ecuații este perechea de numere reale (2, 1).

c) Forma generală a sistemului de ecuații este: $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x - 5y = 2 \end{cases}$,

iar forma matriceală este:

$$AX = B, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Deoarece det(A) = 1, rezultă că A este matrice inversaiblă, iar soluția ecuației matriceale este:

$$X = A^{-1}B, \text{ unde } A^{-1} = A^{*} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se obține $X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -28 \end{pmatrix}$.

Aşadar, soluția sistemului de ecuații este perechea de numere reale (–23, –28).

d) Forma matriceală a sistemului este ecuația matriceală $AX = B$ unde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Avem că det(A) = –30, deci există $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^{*} = -\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -11 & -5 & -14 \\ 7 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Soluția ecuației matriceale este:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -11 & -5 & -14 \\ 7 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -60 \\ 30 \\ -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aşadar, soluția sistemului de ecuații este tripletul de numere reale (2, –1, 3).

e) Forma generală a sistemului de ecuații este:

$$\begin{cases} 6x - 3y + 5z = 3 \\ 4x + 6y - 5z = 3 \\ 2x - 3y + 10z = 2 \end{cases},$$

iar forma matriceală este $AX = B$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Avem că det(A) = 300 $\neq$ 0, deci există $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{*} = \dfrac{1}{300} \cdot \begin{pmatrix} 45 & 15 & -15 \\ -50 & 50 & 50 \\ -24 & 12 & 48 \end{pmatrix}$, iar soluția ecuației matriceale este:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 45 & 15 & -15 \\ -50 & 50 & 50 \\ -24 & 12 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că soluția sistemului de ecuații este tripletul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$.

f) Forma matriceală a sistemului de ecuații este:

$$AX = B \text{ unde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Avem că $\det(A) = 1$, deci există $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = A^* = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, iar soluția ecuației matriceale este $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -8 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b - 8c \\ a - 3b + 5c \\ a - 2b + 3c \end{pmatrix}$.

Rezultă că soluția sistemului de ecuații este tripletul de numere

$$(-a + 5b - 8c, a - 3b + 5c, a - 2b + 3c).$$

E5. *Rezolvare:*

Un sistem de n ecuații cu n necunoscute este de tip Cramer dacă determinantul matricei sistemului este nenul.

a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ cu $\det(A) = 33 \neq 0$.

Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi are soluția unică:

$$x = \frac{dx}{\det(A)},\ y = \frac{dy}{\det(A)}, \text{ unde } dx = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} = 133 \text{ şi } dy = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -4.$$

Rezultă că: $x = \frac{133}{33}$, $y = -\frac{4}{33}$.

b) Matricele asociate sistemului sunt:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 15 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Avem că $\det(A) = 0$.

Rezultă că sistemul nu este de tip Cramer.

c) Avem că $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 5 & 1 & 3\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}$, cu det($A$) = 3 ≠ 0 şi $B=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ -4\end{pmatrix}$.

Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi are soluția:

$$x=\frac{dx}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)},\ \text{unde:}$$

$$d_x=\begin{vmatrix}3 & -4 & 2\\ 6 & 1 & 3\\ -4 & -6 & 1\end{vmatrix}=65;\ d_y=\begin{vmatrix}3 & 3 & 2\\ 5 & 6 & 3\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix}=-4,\ d_z=\begin{vmatrix}3 & -4 & 3\\ 5 & 1 & 6\\ 1 & -6 & -4\end{vmatrix}=-101.$$

Rezultă că $x=\frac{65}{3},\ y=-\frac{4}{3},\ z=-\frac{101}{3}$.

d) Matricea sistemului de ecuații este $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ cu det(A) = 6 ≠ 0, deci sistemul este de tip Cramer.

$$d_x=\begin{vmatrix}10 & -2 & 2\\ 2 & -1 & -1\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}=36,\ d_y=\begin{vmatrix}1 & 10 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}=24,\ d_z=\begin{vmatrix}1 & -2 & 10\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=36.$$

Rezultă că soluția sistemului este:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)}=6;\ y=\frac{d_y}{\det(A)}=4,\ z=\frac{d_z}{\det(A)}=6.$$

E6. *Rezolvare:*

a) $\begin{cases}x+2y=4\\ 2x+5y=9\end{cases}$

Matricele asociate sistemului sunt: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 9\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Avem că det(A) = 1, $d_x=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 9 & 5\end{vmatrix}=2;\ d_y=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\end{vmatrix}=1$.

Rezultă că soluția sistemului de ecuații este dată de formulele lui Cramer:

$$x=\frac{dx}{\det(A)}=2,\ y=\frac{dy}{\det(A)}=1.$$

b) $\begin{cases}-2x+5y=-1\\ 3x-7y=2\end{cases}$

Matricea sistemului de ecuații este $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & -7\end{pmatrix}$ cu $\det(A)=-1$.

Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi soluția se află cu formulele lui Cramer:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ \text{unde } d_x=\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 2 & -7\end{vmatrix}=-3,\ d_y=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-1.$$

Aşadar, soluția sistemului de ecuații este $x = 3$, $y = 1$.

c) $\begin{cases} 4x+3y=17 \\ 6x+5y=-3 \end{cases}.$

Matricea sistemului de ecuații este $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ cu det(A) = 2. Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi soluția se află cu formulele lui Cramer:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},$$

unde:

$$d_x=\begin{vmatrix} 17 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=94,\ d_y=\begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=-114.$$

Se obține soluția sistemului de ecuații: $x = 47$, $y = -57$.

d) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+3z=4 \end{cases}$

Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ cu det(A) = –6.

Rezultă că sistemul de ecuații este de tip Cramer şi soluția se află folosind formulele lui Cramer:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)},$$

unde

$$d_x=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-6;\ d_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-6;\ d_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Rezultă că soluția sistemului este: $x = y = 1$, $z = 0$.

e) $\begin{cases} x+2y-4z=-2 \\ -3x+4y+z=13 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases}$

Matricea sistemului este: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ cu det(A) = 55.

Rezultă că sistemul de ecuații este de tip Cramer şi soluția se află cu formulele lui Cramer:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)},\ \text{unde}$$

$$d_x=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 13 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix}=110;\ d_y=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -3 & 13 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}=220,\ d_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 13 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix}=167.$$

Rezultă că soluția sistemului de ecuații este: $x = 2$, $y = 4$, $z = 3$.

f) Sistemul de ecuații are următoarea formă generală: $\begin{cases} -2x+y+3z=-1 \\ x+3y+2z=4 \\ x-3y+2z=10 \end{cases}$.

Matricea sistemului de ecuații este $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ cu $\det(A) = -42$.

Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi soluția se calculează cu formulele lui Cramer:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)},\text{ unde:}$$

$$d_x=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 10 & -3 & 2 \end{vmatrix}=-126;\ d_y=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix}=42,\ d_z=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 10 \end{vmatrix}=-84.$$

Rezultă că soluția sistemului de ecuații este: $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$.

E7. *Rezolvare:*

a) Calculăm $\det(A)=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=9+8-20-5-24+12=-20$.

Rezultă că A este matrice inversabilă şi $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}=-\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix} -7 & -4 & 5 \\ -22 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Aşadar, soluția sistemului de ecuații este $X = A^{-1}B$, adică:

$$X=-\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 5 \\ -22 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}=-\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ -60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Sistemul de ecuații este: $\begin{cases} -3x+2y+z=4 \\ 4x-y+2z=8 \\ -5x+2y+3z=8 \end{cases}$.

c) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Avem că $\det(A) = -20$.

Formulele Cramer sunt: $x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)}$,

unde $d_x=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-20,\ d_y=\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ -5 & 8 & 3 \end{vmatrix}=-40,\ d_z=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix}=-60$.

Se obținem soluția: $x = 1$; $y = 2$, $z = 3$.

E8. *Rezolvare:*

a) $\begin{cases} x+y=4 & \Big|\cdot(-2) \\ 2x+3y=9 \end{cases}$.

Eliminăm necunoscuta x din a doua ecuație înmulțind prima ecuație cu (–2) şi adunând-o la a doua.

Se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ \quad y \;\;=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x=4-y \\ y=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}.$$

Rezultă că soluția sistemului de ecuații este perechea (3, 1).

b) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=0 \end{cases}$

Permutăm cele două ecuații şi observăm sistemul: $\begin{cases} x+2y=0 & \Big|\cdot(-2) \\ 2x+y=3 \end{cases}$

Eliminăm necunoscuta x din a doua ecuație înmulțind prima ecuație cu (–2) şi aduând-o la cealaltă.

Se obține: $\begin{cases} x+2y=0 \\ \quad -3y=3 \end{cases}$.

Rezultă că $y = -1$ şi $x = 2$. Aşadar soluția sistemului de ecuații este perechea (2, – 1).

c) $\begin{cases} x+y+z=1 & \Big|\cdot(-1) \\ x+2y+2z=-1 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$.

Eliminăm x din ecuația a doua şi a treia păstrând prima ecuație neschimbată.

Rezultă sistemul de ecuații: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad y+2z=-2 & \Big|\cdot 2 \\ -2y+z=1 \end{cases}$

Eliminăm y din ecuația a treia înmulțind ecuația a doua cu 2 şi adunând-o la ultima ecuație.

Se obține: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad y+z=-2 \\ \qquad 3z=-3 \end{cases}$

Pornind de la ultima ecuație a sistemului spre prima ecuație se obține: $z = -1$, $y = -1$, $x = 3$.
Aşadar, soluția sistemului de ecuații este tripletul (3, –1, –1).

d) Permutăm ecuația întâi cu a patra şi se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x+\;\;\;y+\;\;z=6 & \Big|\cdot(-4);\Big|\cdot(-6);\Big|\cdot(-2) \\ 4x-\;6y-\;3z=0 \\ 6x+10y-10z=8 \\ 2x+\;5y+\;3z=17 \end{cases} \qquad (1)$$

Eliminăm necunoscuta x din a doua, a treia şi a patra ecuație, păstrând prima ecuație neschimbată.
Pentru aceasta înmulțim succesiv prima ecuație cu –4, –6, –2 şi o adunăm la a doua, a treia, respectiv a patra ecuație a sistemului (1).

Se obține sistemul echivalent: $\begin{cases} x+\quad y+\quad z=6 \\ \quad -10y-\ 7z=-24 \\ \qquad 4y-16z=-28 \quad \big|:4 \\ \qquad 3y+\quad z=5 \end{cases}.$

Împărțim ecuația a treia cu 4 şi o permutăm cu a doua ecuație după care procedăm la eliminarea necunoscutei y din ultimele două ecuații raportându-se la a doua ecuație a sistemului. Se obțin sistemele echivalente:

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=6 \\ \qquad y-4z=-7 \quad \big|\cdot 10;\ \big|\cdot(-3) \\ -10y-7z=-24 \\ \quad 3y+\ \ z=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+\quad z=6 \\ \quad y-\ 4z=-7 \\ \qquad -47z=-94 \\ \qquad\ 13z=26 \end{cases}.$$

Din ultimele două ecuații se obține $z = 2$, apoi se obține $y = 1$ şi $x = 3$.
Aşadar soluția sistemului este tripletul (3, 1, 2).

e) Eliminăm necunoscuta x din ecuațiile a doua, a treia şi a patra înmulțind prima ecuație cu (–2), (–2) şi (–1) şi adunând-o respectiv la a doua, a treia şi a patra ecuație.
Se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ \ -y+4z=3 \\ \quad y+4z=6 \\ \quad y\qquad =0 \end{cases}.$$

Înlocuind $y = 0$ în ecuația a doua şi a treia se obțin două ecuații contradictorii: $4z = 3$ şi $4z = 6$.
Rezultă că sistemul este incompatibil.

f) • Eliminăm x din ecuația a doua, a treia şi a patra. Se obține sistemul echivalent.

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ \ -y-3z=-2 \\ \quad y-3z=-2 \\ \quad y-3z=-2 \end{cases}$$

• Eliminăm y din ecuația a treia şi a patra, raportându-ne la ecuația a doua. Se obține:

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ \ -y-3z=-2 \\ \qquad 0\cdot z=0 \\ \qquad 0\cdot z=0 \end{cases}$$

Rezultă că z poate fi orice număr real sau complex. Notăm $z=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C}$ şi se obține:

$$y=3\alpha-2 \text{ şi } x=-5\alpha+6$$

Aşadar sistemul este simplu nedeterminat şi mulțimea soluțiilor este:

$$S=\left\{(-5\alpha+6,\ 3\alpha-2,\ \alpha)\ \middle|\ \alpha\in\mathbb{C}\right\}$$

g) Permutăm prima şi a doua ecuaţie între ele. Se obţine sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x+\ \ 2y-3z=0 & \Big|\cdot(-2);\ \Big|(-2);\ \Big|\cdot(-4) \\ 2x-\ \ 3y+\ \ z=-1 \\ 2x-10y+8z=-1 \\ 4x-15y+9z=0 \end{cases}$$

Eliminăm x din a doua, a treia şi a patra ecuaţie. Se obţine sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x+\ 2y-\ 3z=0 \\ \ \ -\ 7y+\ 7z=-1 \\ \ \ -14y+14z=-1 \\ \ \ -23y+21z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-\ 2z=0 \\ \ \ -\ y+\quad z=-\dfrac{1}{7} \\ \ \ -\ y+\quad z=-\dfrac{1}{14} \\ \ \ 23y-21z=0 \end{cases}.$$

Se observă că a doua şi a treia ecuaţie sunt contradictorii.

Rezultă că sistemul este incompatibil.

h) Sistemul se scrie sub forme echivalente astfel:

$$\begin{cases} x-\ y-2z=-3\ \Big|\cdot(-2) \\ 2x-3y-\ z=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y-2z=-3 \\ \ \ -y+3z=7 \end{cases}$$

Se consideră z necunoscută secundară, notată parametric $z=\alpha,\ a\in\mathbb{C}$ şi se obţine

$$y=3\alpha-7,\ x=\alpha-10\,.$$

Soluţia sistemului este mulţimea $S=\left\{(5\alpha-10,\ 3\alpha-7,\ \alpha)\ \middle|\ \alpha\in\mathbb{C}\right\}$

i) Sistemul se scrie sub forma echivalentă succesiv:

$$\begin{cases} a-2b+c=10 \\ 3a-2b-c=7 \end{cases} \sim \begin{cases} a-2b+\ \ c=10 \\ \quad 4b-4c=-23 \end{cases}.$$

Se ia $c=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C}$ şi se obţine $b=\dfrac{4x-23}{4},\ a=\dfrac{2\alpha-3}{2}$.

Aşadar, mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii este $S=\left\{\left(\dfrac{2\alpha-3}{2},\ \dfrac{4\alpha-23}{4},\ \alpha\right)\middle|\ \alpha\in\mathbb{C}\right\}$.

j) Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{cases} x+y+\ \ z=1 \\ -3y-\ \ z=0 \\ \ \ 2y-2z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=1 \\ \ \ z+3y=0 \\ \ \ \ \ 8y=0 \end{cases}.$$

Rezultă că $y = 0$, $z = 0$ şi $x = 1$.

Aşadar, sistemul este compatibil determinat cu soluţia tripletul (1, 0, 0).

S1. *Rezolvare:*
a) Sistemul este de tip Cramer dacă determinantul matricei sistemului este nenul.
Aşadar, avem condiţia:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -m & 1\\ 1 & -2 & 1\\ m & m^2 & -2\end{vmatrix}=4-m^2.$$

Din condiţia $4-m^2\neq 0$ rezultă că $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.

Soluţia sistemului se calculează cu formulele lui Cramer: $x=\dfrac{d_x}{\det(A)}$, $y=\dfrac{d_y}{\det(A)}$, $z=\dfrac{d_z}{\det(A)}$

unde $d_x=\begin{vmatrix}2m & -m & 1\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & m^2 & -2\end{vmatrix}=-2m^3-m^2+8m+4=-m^2(2m+1)+4(2m+1)=(2m+1)(4-m^2)$.

$$d_y=\begin{vmatrix}1 & 2m & 1\\ 1 & -1 & 1\\ m & 2 & -2\end{vmatrix}=2m^2+5m+2=(2m+1)(m+2),$$

$$d_z=\begin{vmatrix}1 & -m & 2m\\ 1 & -2 & -1\\ m & m^2 & 2\end{vmatrix}=2m^3+6m^2+2m-4=(m+2)(2m^2+2m-2).$$

Se obţine soluţia sistemului: $x=2m+1$, $y=\dfrac{2m+1}{2-m}$, $z=\dfrac{2m^2+2m-2}{2-m}$.

b) Punem condiţia: $\det(A)\neq 0$, adică:

$$\begin{vmatrix}1 & m & -1\\ 2 & -1 & -2\\ m & 2 & 1\end{vmatrix}=-2m^2-3m-1=-(2m+1)(m+1).$$

Sistemul este de tip Cramer dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}, -1\right\}$ şi soluţia se calculează cu formulele:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)},\text{ unde}$$

$$d_x=\begin{vmatrix}8 & m & -1\\ 6 & -1 & -2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=-14m+8,\ d_y=\begin{vmatrix}1 & 8 & -1\\ 2 & 6 & -2\\ m & 4 & 1\end{vmatrix}=-10(m+1),\ d_z=\begin{vmatrix}1 & m & 8\\ 2 & -1 & 6\\ m & 2 & 4\end{vmatrix}=6m^2+16.$$

Se obţine soluţia: $x=\dfrac{14m-8}{(m+1)(2m+1)}$, $y=\dfrac{10}{2m+1}$, $z=\dfrac{-6m^2-16}{(m-1)(2m+1)}$.

S2. *Rezolvare:*

Sistemul de n ecuații cu n necunoscute nu este de tip Cramer dacă determinantul matricei sistemului este nul: det(A) = 0.

a) Avem:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & m+1 & 1\\ m & 1 & -1\\ 1 & -2 & -m\end{vmatrix}=m^3+m^2-4m-4=m^2(m+1)-4(m+1)=(m+1)(m^2-4)=$$

$$=(m+1)(m-2)(m+2).$$

Condiția det(A) = 0 conduce la $m\in\{-2,-1,2\}$.

b) $\det A=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2 & 3 & m+2\\ 3 & 1 & m\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 5m-19=0\Leftrightarrow m=\dfrac{19}{5}$.

S3. *Rezolvare:*

a) Forma simplă a sistemului de ecuații este:

$$\begin{cases}5x-6y=-28\\ 4x-y=-11\end{cases}.$$

Matricele asociate sistemului sunt:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 4 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-28\\ -11\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

• Rezolvarea sistemului prin metoda matriceală:

Forma matriceală a sistemului este $AX = B$. det(A) = 19 ≠ 0.

Rezultă că există $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*$, adică $A^{-1}=\dfrac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -4 & 5\end{pmatrix}$ şi soluția ecuației matriceale este matricea $X=\dfrac{1}{19}\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28\\ -11\end{pmatrix}$.

Se obține $X=\dfrac{1}{19}\begin{pmatrix}-38\\ 57\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$.

Aşadar soluția sistemului de ecuații este perechea (–2, 3).

• Rezolvarea sistemului prin metoda lui Cramer.

Avem că det(A) = 19, deci sistemul este de tip Cramer şi soluția lui se calculează cu formulele lui Cramer:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)}\ \text{unde}\ d_x=\begin{vmatrix}-28 & -6\\ -11 & -1\end{vmatrix}=-38,\ d_y=\begin{vmatrix}5 & -28\\ 4 & -11\end{vmatrix}=57.$$

Rezultă că soluția sistemului este:

$$x=-2;\ y=3.$$

• Rezolvarea sistemului prin metoda lui Gauss.

Forma simplă a sistemului este:

$$\begin{cases}5x-6y=-28 & \Big|\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)\\ 4x-\ \ y=-11\end{cases}.$$

Eliminăm necunoscuta x din a doua ecuație, înmulțind prima ecuație cu $-\frac{4}{5}$ şi adunând-o la a doua. Se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 5x-6y=-28 \\ \frac{19}{5}\cdot y=\frac{57}{5} \end{cases}.$$

Din a doua ecuație rezultă $y = 3$ iar din prima ecuație se obține $x = -2$.

S4. *Rezolvare:*

a) Matricele asociate sistemului sunt: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2+i \\ 1 & i & -1-i \\ i & 0 & -i \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2+2i \\ -1 \\ -1-i \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Determinantul matricei A este $\det(A) = i \neq 0$.
Sistemul este de tip Cramer şi soluția se află cu formulele:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)},\ \text{unde}$$

$$d_x=\begin{vmatrix} -2+2i & 1 & -2+i \\ -1 & i & -1-i \\ -1-i & 0 & -i \end{vmatrix}=-1;\quad d_y=\begin{vmatrix} 1 & -2+2i & -2+i \\ 1 & -1 & -1-i \\ i & -1-i & -i \end{vmatrix}=0;\quad d_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2+2i \\ 1 & i & -1 \\ i & 0 & -1-i \end{vmatrix}=i.$$

Se obține soluția $x = i, y = 0, z = 1$.

b) Forma simplă a sistemului este:

$$\begin{cases} 3x-3y+4z=2 \\ 10x-4y+10z=6 \\ 6x-6y+6z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x-3y+4z=2 \\ 5x-2y+5z=3 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Matricele asociate sunt:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Avem că $\det(A) = -3 \neq 0$. Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi soluția se calculează cu formulele:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)},\ y=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)}\ \text{unde } d_x=3,\ d_y=-3,\ d_z=-6.$$

Se obține soluția: $x = -1, y = 1, z = 2$.

S5. *Rezolvare:*

a) Formula simplă a sistemului este:

$$\begin{cases} 2x+4y-3z=11 \\ 7x-3y+5z=6 \\ 3x+y-8z=15 \\ 6x-5y+11z=-4 \end{cases}$$

Pentru uşurința calculelor vom permuta în cadrul fiecărei ecuații termenii cu necunoscutele x şi y şi totodată vom schimba între ele prima şi a treia ecuație. Se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} y+3x-8z=15 & \Big|\cdot -4;\ \Big|\cdot 3;\ \Big|\cdot 5 \\ 4y+2x-3z=11 \\ -3y+7x+5z=6 \\ -5y+6z+11z=-4 \end{cases}.$$

Eliminăm necunoscuta y din ecuațiile a II-a, a III-a, a IV-a, obținând $\begin{cases} y+3x-8z=15 \\ -10x+29z=-49 \\ 16x-19z=51 \\ 21x-29z=71 \end{cases}$.

Din ecuația a doua şi a patra se obține, după adunarea lor, $11x = 22$, deci $x = 2$.
Pentru $x = 2$ din ecuația a doua se obține $z = -1$.
Perechea $x = 2$, $z = -1$ verifică şi ecuația a treia şi a patra.
Din prima ecuație se obține $y = 17$.
Aşadar, soluția sistemului de ecuații este tripletul $(2, 1, -1)$.

b) Sistemul se scrie sub următoarea formă echivalentă: $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}$.

Schimbăm prima ecuație cu a doua şi apoi eliminăm din celelalte ecuații necunoscuta x:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 & \Big|(-2);\ \Big|(-1);\ \Big|(-2) \\ 2x+y+z=2 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases} \sim \begin{cases} x+3y+z=5 \\ -5y-z=-8 \\ -2y+4z=-12 \\ -3y-5z=4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x+z+3y=5 \\ z+5y=8 & \Big|\cdot(-2);\ \Big|\cdot(-5) \\ 2z-y=-6 \\ 5z+3y=-4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+z+3y=5 \\ z+5y=8 \\ -11y=-22 \\ -22y=-44 \end{cases}.$$

Din ultimele două ecuații se obține $y = 2$, apoi $z = -2$, $x = 1$.
Aşadar soluția sistemului inițial este tripletul $(1, 2, -2)$.

c) Sistemul se scrie în următoarea formă echivalentă:

$$\begin{cases} x+y-3z=-1 & \Big|\cdot(-2);\ \Big|(-1);\ \Big|\cdot(-1) \\ 2x+y-2z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$$

Se elimină necunoscuta x din ecuațiile a doua, a treia şi a patra şi se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ -y+4z=3 \\ 4z=4 \\ y+0\cdot z=2 \end{cases}$$

Din ultimele două ecuații se obține că: $y = 2$, $z = 1$ soluții care nu verifică ecuația a doua.
Rezultă că sistemul este incompatibil.

d) Sistemul se scrie sub următoarea formă echivalentă:

$$\begin{cases} 3x+\ 2y+\ 4z=-4 & \left|\cdot\frac{4}{3};\ \right|\cdot\left(-\frac{11}{3}\right) \\ -4x+\ 5y+\ 7z=8 & \\ 11x-31y-47z=-68 & \end{cases}$$

Eliminăm x din a doua şi a treia ecuaţie obţinând sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 3x+2y+\ \ 4z=-4 \\ \frac{23}{3}y+\frac{37}{3}z=\frac{8}{3} \\ -\frac{115}{3}y-\frac{185}{3}z=-\frac{160}{3} \ \left|\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right. \end{cases} \sim \begin{cases} 3x+2y+\ 4z=-4 \\ 23y+37z=8 \\ 23y+37z=32 \end{cases}$$

Se observă că ultimele două ecuaţii sunt contradictorii.
Rezultă că sistemul de ecuaţii este incompatibil.

e) Sistemul se scrie sub următoarele forme echivalente:

$$\begin{cases} 2x+7y-\ 4z=0 \ \left|\cdot\left(-\frac{5}{2}\right);\ \right|\cdot(-6) \\ 5x-2y-\ 8z=0 \\ 12x+3y-20z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x+7y-4z=0 \\ -\frac{39}{2}y+2z=0 \\ -39y+4z=0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 2x+7y-2z=0 \\ -39y+2z=0 \\ -39y+2z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x+7y-4z=0 \\ -39y+2z=0 \\ 0\cdot z=0 \end{cases}$$

Rezultă că z poate fi orice număr real sau complex.

Notăm $z\in\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C}$ şi apoi se obţine că $y=\frac{2\alpha}{39};\ x=\frac{71\alpha}{39}$.

f) • Eliminăm necunoscutele x şi obţinem: $\begin{cases} x-\ \ \ 4y+\ (2m+3)z=0 \\ (4-m)y-\ (2m+4)z=0 \\ 9y-2(2m+3)z=8 \end{cases}$

Rescriem sistemul sub forma: $\begin{cases} x-4y+(2m+3)z=0 \\ 9y-2(2m+3)z=8 \ /\cdot\frac{m-4}{9} \\ (4-m)y-(2m+4)z=0 \end{cases}$

• Eliminăm y din ecuaţia a treia: $\begin{cases} x-4y+(2m+3)z=0 \\ 9y-2(2m+3)z=8 \\ \frac{-4m^2-8m-12}{9}\cdot z=\frac{8(m-4)}{9} \end{cases}$

Se obţine: $z=\frac{2(4-m)}{m^2+2m+3};\ y=\frac{4(m+2)}{m^2+2m+3};\ x=\frac{2(2m^2+3m+4)}{m^2+2m+3},\ m\in\mathbb{R}$.

S6. *Rezolvare:*

a) Sistemul este compatibil determinat dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este nenul.

Avem: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & m \\ 5 & 4 & 3(m+1) \end{vmatrix} \neq 0$.

Se obține $m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

b) Pentru $m = 0$ se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ 5x+4y+3z=3 \end{cases} \text{ şi } A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se găseşte că $\det(A) = 0$, deci sistemul nu este de tip Cramer.
Rezolvăm sistemul cu metoda lui Gauss.
Rescriem sistemul sub următoarea formă:

$$\begin{cases} x-y=0 \quad \Big| \cdot(-2); \Big| \cdot(-5) \\ 2x+y+z=0 \\ 5x+4y+3z=3 \end{cases}$$

Eliminăm necunoscuta x din a doua şi a treia ecuație păstrând prima ecuație neschimbată.
Se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 3y+z=0 \quad \Big|(-3) \\ 9y+3z=3 \end{cases}$$

Eliminăm necunoscuta y din a treia ecuație înmulțind pe a doua cu (–3) şi adunând-o la a treia:

Avem sistemul: $\begin{cases} x-y=0 \\ 3y+z=0 \\ 0\cdot z=3 \end{cases}$

Se observă că ultima ecuație este contradictorie (0 = 3) şi ca urmare sistemul este incompatibil.

• Pentru $m = -1$ sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x-2y-z=-2 \\ 5x+4y=3 \end{cases}$$

Rescriem sistemul sub următoarea formă: $\begin{cases} z+2y-x=2 \\ y+2x=-1 \quad \Big| \cdot(-4) \\ 4y+5x=3 \end{cases}$

Eliminăm pe y din ultima ecuație raportându-ne la ecuația a doua şi obținem: $\begin{cases} z+2y-x=2 \\ y+2x=-1 \\ -3x=7 \end{cases}$

Se obțin soluțiile: $x=-\dfrac{7}{3},\ y=\dfrac{11}{3},\ z=-\dfrac{23}{3}$.

• Pentru $m = 2$ sistemul de ecuații devine: $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \\ 5x + 4y + 9z = 3 \end{cases}$

Determinantul matricei sistemului este zero, deci sistemul nu este de tip Cramer.
Rezolvăm sistemul cu metoda lui Gauss.
Sistemul de ecuații se scrie sub următoarea formă echivalentă:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \; \big| \cdot(-2); \big| \cdot(-5) \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 4y + 9z = 3 \end{cases}$$

Eliminăm x din ecuațiile a doua şi a treia păstrând prima ecuație neschimbată. Se obține:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ \quad -y - z = -6 \\ \quad -y - z = -17 \end{cases}$$

Se observă deja că din ultimele două ecuații rezultă că $6 = 17$, ceea ce este fals.
Aşadar, pentru $m = 2$ sistemul de ecuații este incompatibil.

S7. *Rezolvare:*

Determinantul matricei sistemului este $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ (vezi exercițiul rezolvat de la pagina 51 din manual).
Deoarece $a \neq b \neq c$ rezultă că $d \neq 0$ şi sistemul este de tip Cramer.
Aplicăm formulele lui Cramer şi obținem:

• $x = \dfrac{d_x}{d}$, unde $d_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & c \\ 4 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-2)(c-2)(c-b)$ (determinant Vandermonde de ordinul 3)

Rezultă că $x = \dfrac{(b-2)(c-2)}{(b-a)(c-a)}$.

• $y = \dfrac{d_y}{d}$ unde $d_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & c \\ a^2 & 4 & c^2 \end{vmatrix} = (2-a)(c-a)(c-2)$.

Se obține $y = \dfrac{(2-a)(c-2)}{(b-a)(c-b)}$.

• $z = \dfrac{d_z}{d}$, unde $d_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 2 \\ a^2 & b^2 & 4 \end{vmatrix} = (b-a)(2-a)(2-b)$.

Se obține $z = \dfrac{(2-a)(2-b)}{(c-a)(c-b)}$.

S8. *Rezolvare:*

a) $A=\begin{pmatrix}2m-1 & 3 & -m\\ 3 & 2m-1 & m-1\\ m-2 & m-2 & 1\end{pmatrix}$; $\det(A)=0 \Leftrightarrow 6m(m-2)=0 \Leftrightarrow m\in\{0,\,2\}$.

b) Sistemul nu este de tip Cramer dacă $\det(A) = 0$, deci pentru $m\in \{0, 2\}$.

c) Pentru $m\in \mathbb{R}\setminus\{0, 2\}$ soluția sistemului este dată de formulele lui Cramer:

$$x_m=\frac{d_x}{\det(A)},\ y_m=\frac{d_y}{\det(A)},\ z=\frac{d_z}{\det(A)} \text{ unde } d_x=\begin{vmatrix}1 & 3 & -m\\ 3 & 2m-1 & m-1\\ 2 & m-2 & 1\end{vmatrix}=3(5m-6)$$

$$d_y=\begin{vmatrix}2m-1 & 1 & -m\\ 3 & 3 & m-1\\ m-2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-3(m+2),\ d_z=\begin{vmatrix}2m-1 & 3 & 1\\ 3 & 2m-1 & 3\\ m-2 & m-2 & 2\end{vmatrix}=24(m-2).$$

Se obține soluția: $x_m=\dfrac{5m-6}{2m(m-2)};\ y_m=\dfrac{-m-2}{2m(m-2)},\ z_m=\dfrac{4}{m}$.

d) $x_m+2y_m-z_m>1 \Leftrightarrow \dfrac{5m-6}{2m(m-2)}-\dfrac{m+2}{m(m-2)}-\dfrac{^{2m-4)}4}{m}>1 \Leftrightarrow \dfrac{5m-6-2m-8m+16}{2m(m-2)}>1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-5m+6}{2m(m-2)}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{-2m^2-m+6}{2m(m-2)}>.$

Tabelul de semn pentru expresia fracționară este:

m	$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad +\infty$
$-2m^2-m+6$	$- - - -\ 0\ + + + + + + +\ 0 - - - - - - -$
$2m(m-2)$	$+ + + + + + + +\ 0 - - - - - -\ \ 0 + + + +$
$\dfrac{-2m^2-m+6}{2m(m-2)}$	$- - -\ 0 + + +\ \vert - - - - 0 + +\ \vert - - - -$

Soluția inecuației este mulțimea: $S=(-2,\,0)\cup\left(\dfrac{3}{2},\,2\right)$.

S9. *Rezolvare:*

a) Determinantul matricei sistemului este: $d=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1$.

Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi soluția este dată de formulele:

$$x(a)=\frac{d_x}{d},\ y(a)=\frac{d_y}{d},\ z(a)=\frac{d_z}{d},\text{ unde } d_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2^a & 1 & 1\\ 4^4 & 1 & 2\end{vmatrix}=1-2^a,$$

$$d_y=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2^a & 1\\ 1 & 4^a & 2\end{vmatrix}=-4^a+3\cdot 2^a-1,\qquad d_z=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2^a\\ 1 & 1 & 4^a\end{vmatrix}=4^a-2^a.$$

Se obține soluția: $x(a) = 1 - 2^a$, $y(a) = -4^a + 3\cdot 2^a - 1$, $z(a) = 4^a - 2^a$, $a\in \mathbb{R}$.

b) $y(a) > 1 \Leftrightarrow -a^4 + 3 \cdot 2^a - 1 > 1 \Leftrightarrow -4^a + 3 \cdot 2^a - 2 > 0$.
Notăm $2^a = m$ şi se obține inecuația $-m^2 + 3m - 2 > 0$.
Dar $-m^2 + 3m - 2 = 0$ pentru $m \in \{1, 2\}$.
Tabelul de semn pentru expresia $-m^2 + 3m - 2$ este:

m	$-$ 1 2 $+$
$-2m^2 + 3m - 2$	$- - - - - -$ 0 $+ + + +$ 0 $- - - - -$

Soluția inecuației cu necunoscuta m este: $m \in (1, 2)$.
Revenind la notația făcută se obține că $2a \in (1, 2)$ adică $a \in (0, 1)$.

S10. *Rezolvare:*
Sistemul este compatibil determinat dacă determinantul matricei sistemului este nenul.
Aşadar, avem condiția:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha+1 & \beta+1 & 2 \\ 1 & 2\beta & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -\alpha\beta + \beta \neq 0 \Leftrightarrow \beta(1-\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 0 \text{ şi } \alpha \neq 1.$$

Rezultă că răspunsul corect este b)

S11. *Rezolvare:*
Matricele asociate sistemului sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ \det(A) = -3m + 6 = -3(m-2).$$

• Dacă $m \neq 2$, atunci $\det(A) \neq 0$, atunci $\det(A) \neq 0$ şisistemul este compatibil determinat cu soluția dată de formulele:

$$x = \frac{d_x}{\det(A)},\ y = \frac{d_y}{\det(A)},\ z = \frac{d_z}{\det(A)},\ \text{unde } d_x = 4(m-2),\ d_y = -2(m-2),\ d_z = -3(m-2).$$

Se obține soluția $x = -\frac{4}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = 1,\ m \neq 2$.

• Dacă $m = 2$ sistemul devine: $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$

Deoarece $\det(A) = 0$, sistemul nu este de tip Cramer.
Pentru rezolvare aplicăm metoda lui Gauss.
Sistemul este echivalent cu următoarele sisteme:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \ \big|\cdot(-2) \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 3y + z = 3 \ \big|\cdot(-1) \\ 3y + z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 3y + z = 3 \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases}.$$

Rezultă că $z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C},\ y = \frac{3-\alpha}{3},\ x = -\frac{4\alpha}{3}$.
Aşadar, pentru $m = 2$ sistemul este compatibil nedeterminat cu mulțimea soluțiilor:

$$S = \left\{ \left(-\frac{4\alpha}{3}, \frac{3-\alpha}{3}, \alpha \right) \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

S12. *Rezolvare:*

Dacă sistemul de ecuații are numai soluția nulă rezultă că este de tip Cramer și se pune condiția ca det(A) $\neq$ 0, unde A este matricea sistemului.

Avem $\det(A)=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-m^2+m+2$.

Dacă $-m^2+m+2=0$, rezultă că $m\in\{-1, 2\}$, iar det(A) $\neq$ 0 pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 2\}$.

Răspunsul corect este a).

S13. *Rezolvare:*

Notăm cu x, y, z debitul robinetului I, debitul robinetului II, respectiv debitul robinetului III.

Se obține sistemului de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute:

$$\begin{cases} 2x+3y+6z=220 \\ 3x+2y+6z=210 \\ 2x+2y+3z=145 \end{cases}$$

Matricea sistemului are determinantul d = 9. Rezultă că sistemul este de tip Cramer și soluția este dată de formulele $x=\frac{d_x}{d}$, $y=\frac{d_y}{d}$, $z=\frac{d_z}{d}$.

Se obține x = 20 hl, y = 30 hl, z = 15 hl.

S14. *Rezolvare:*

Notăm cu t, f, F vârstele tatălui, fiului mic și fiului mare.

Din datele problemei se obțin următoarele relații între t, f, F. $f=\frac{1}{6}(t+7)$; $F+15=\frac{1}{2}(t+15)$, adică $F=\frac{t-15}{2}$ și $f+18+F+18=t+18$.

Aceste relații se constituie în sistemul de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute f, F, t.

$$\begin{cases} 6f-t=7 \\ 2F-t=-15 \\ f+F-t=-18 \end{cases}.$$

Matricea A a sistemului are det(A) = –4 $\neq$ 0, deci sistemul este de tip Cramer.

Se obțin soluțiile f = 7, F = 10, t = 35.

S15. *Rezolvare:*

a) Pentru m = 1 și n = 5 se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 2x+y+z=5 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}.$$

Matricea A a sistemului are $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-10$.

Rezultă că sistemul este de tip Cramer și soluția este dată de formulele lui Cramer.

$$x=\frac{d_x}{\det(A)}=\frac{-30}{-10}=3;\ y=\frac{d_y}{\det(A)}=\frac{10}{-10}=-1;\ z=\frac{d_z}{\det(A)}=\frac{0}{-10}=0.$$

b) Fie A matricea sistemului de ecuații:

$$A=\begin{pmatrix}1 & m & -2\\ 2 & 2m-1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \text{ cu } \det(A) = 5(m-3).$$

Se observă că $\det(A) = 0$ dacă $m = 3$.

• Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\det(A) \neq 0$ şi sistemul este compatibil determinat cu soluția dată de formulele lui Cramer:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)}=\frac{17m-4n-3mn-12}{5(m-3)}$$

$$y=\frac{d_y}{\det(A)}=\frac{5(n-3)}{5(m-3)},\ z=\frac{d_z}{\det A}=\frac{mn-4m-2n+9}{5(m-3)},\ n\in\mathbb{R}.$$

• Dacă $m = 3$, $\det(A) = 0$, caz în care vom rezolva sistemul cu metoda lui Gauss.

Avem următorul sistem:

$$\begin{cases} x+3y-2z=2 & \Big|\cdot(-2),\ \Big|\cdot(-1)\\ 2x+5y+z=n \\ x+2y+3z=1\end{cases}.$$

Eliminăm necunoscuta x din a doua şi a treia ecuație păstrând pe prima neschimbată.

Se obține sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x+3y-2z=2\\ -y+5z=n-4\\ -y+5z=-1\end{cases}.$$

Din acest moment se poate începe discuția compatibilității sistemului referindu-ne la ultimele două ecuații ($n-4=-1$ etc.) sau, încă, eliminăm y din ultima ecuație raportându-ne la a doua. Se obține sistemul echivalent.

$$\begin{cases} x+3y-2z=2\\ -y+5z=n-4\\ 0\cdot z=n-3\end{cases}.$$

Dacă $n-3 \neq 0$, adică $n = 3$, sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Se ia $z=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ şi se obține $y=5\alpha+1$, $x=-13\alpha-1$.

Aşadar, pentru $m = 3$, $n = 3$, mulțimea soluțiilor este $S=\{(-13\alpha-1,\ 5\alpha+1,\ \alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1.

1. *Rezolvare:*

a) A nu este inversabilă dacă $\det(A) = 0$. Se obține ecuația $x^2 - 9x + 20 = 0$ cu sluțiile: $x_1 = 5,\ x_2 = 4$

b) Pentru $x = 2$, se obține matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 8 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, cu $\det(A) = 6$ şi

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot A^* = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -2 & -1 \\ -24 & 8 & 1 \\ -18 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. *Rezolvare:*

a) Sistemul are soluție unică dacă determinantul matricei A a sistemului este nenul.

Avem: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 10m - 9 \neq 0$.

Se obține $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 9\}$.

b) Pentru $m = 3$ se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = 1 & \Big| \cdot (-1); \ \Big| \cdot (-6) \\ x - \ \ y + 2z = 2 \\ 6x + 9y + 3z = 9 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul prin metoda lui Gauss.
Obținem succesiv următoarele sisteme echivalente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad -3y + z = 1 \\ -3y - 3z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad -3y + z = 1 \\ \qquad\quad 4z = -2 \end{cases}.$$

Se obține soluția: $z = -\dfrac{1}{2},\ y = -\dfrac{1}{2};\ x = \dfrac{5}{2}$.

3. *Rezolvare:*

Modelul matematic al problemei este următorul sistem liniar de ecuații:

$$\begin{cases} 3x + y + 7z = 45 \\ 5x + 3y + 2z = 28 \\ 4x + 5y + 5z = 42 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul cu metoda lui Gauss reordonând mai întâi necunoscutele în cadrul fiecărei ecuații.
Se obțin succesiv următoarele sisteme echivalente:

$$\begin{cases} y + 3x + 7z = 45 \ \Big| \cdot (-3); \ \Big| \cdot (-5) \\ 3y + 5x + 2z = 28 \\ 5y + 4x + 5z = 42 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x + \ \ 7z = 45 \\ \quad -4x - 19z = -107 \\ \quad -11x - 30z = -183 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x + \ \ 7z = 45 \\ \qquad 4x + 19z = 107 \\ \qquad\qquad 89z = 445 \end{cases}$$

Începând cu ultima ecuație a sistemului se obține: $z = 5$, $x = 3$, $y = 5$.

Testul 2.

1. *Rezolvare:*

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*=-A^*=-\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -3\\ -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 3\\ 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot B^*=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}4 & -4 & -2\\ 2 & 3 & -1\\ -4 & -1 & 7\end{pmatrix}.$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ şi } C^{-1}=-C^*=-\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2. *Rezolvare:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 4 & 2 & -2\\ 6 & 15 & 3\end{pmatrix} \text{ cu } \det(A)=12\neq 0.$$

Rezultă că soluția ecuației matriceale este matricea

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{12}\cdot A^*\cdot B=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}36 & -12 & 4\\ -24 & 9 & -2\\ 48 & -21 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 2\\ 45\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}12\\ -168\\ 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -14\\ 3\end{pmatrix}.$$

3. *Rezolvare:*

a) Dacă A este matricea sistemului, atunci $\det(A)=\begin{vmatrix}m+1 & 1 & 1\\ 1 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{vmatrix}=m^3+3m^2$.

b) Sistemul de ecuații este compatibil determinat dacă $\det(A)\neq 0$.
Dar $\det(A)=0$, dacă $m^2(m+3)=0$, adică $m=0$, $m=-3$.

c) Pentru $m=2$ sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases}3x+y+z=1\\ x+3y+z=2\\ x+y+3z=4\end{cases} \text{ cu } A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \text{ şi } \det A=20.$$

Prin regula lui Cramer se obține:

$$x=\frac{d_x}{\det(A)}=-\frac{4}{20}=-\frac{1}{5};\quad y=\frac{d_y}{\det(A)}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10};\ z=\frac{d_z}{\det(A)}=\frac{26}{20}=\frac{13}{10}.$$

d) Pentru $m=0$ sistemul devine: $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$

Se observă că prima şi a doua ecuație sunt contradictorii (ar rezulta că 1 = 0). Rezultă că pentru $m=0$ sistemul obținut este incompatibil.

Probleme recapitulative

Soluții

1. Avem $A^2=\begin{pmatrix}7 & 15\\ 10 & 22\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}37 & 81\\ 54 & 118\end{pmatrix}$. Se obține sistemul de ecuație $\begin{cases}b+7a=-37\\ 3b+15a=-81\end{cases}$ cu soluția $a=-5$, $b=-2$.

2. $A^2=\begin{pmatrix}x^2+y^2 & 2xy\\ 2xy & x^2+y^2\end{pmatrix}$ şi se obține egalitatea:

$$\begin{pmatrix}x^2+y^2 & 2xy\\ 2xy & x^2+y^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x & 4y\\ 4y & 4x\end{pmatrix}$$

de unde rezultă sistemul de ecuații $\begin{cases}x^2+y^2+4=4x\\ 2xy=4y\end{cases}$.

Se deosebesc cazurile:

- $\begin{cases}y=0\\ x^2+4=4x\end{cases}$ deci $x=2$, $y=0$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $A^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.
- $y\neq 0$ şi astfel $x=2$.

Din prima ecuație se află $y=0$ fals.

3. $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2a & 1 & 0\\ 2b+ac & 2c & 1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3a & 1 & 0\\ 3ac+3b & 3c & 1\end{pmatrix}$. Din relația dată, pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ se obține că $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha+\beta=3\end{cases}$ şi $\alpha=3,\beta=-3$.

Pentru $a=c=b=0$, $A=I_3$ şi vom avea că $(\alpha+\beta)I_3=O_3$, deci $\alpha+\beta=0$. Soluția $\alpha=m$, $\beta=-m, m\in\mathbb{R}$.

4. $A^2=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ 1 & a & 1\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$, $E(A)=\begin{pmatrix}a+4 & -4a & a\\ -3 & a+4 & -3\\ -3 & a+4 & -3\end{pmatrix}$. Se obține $a=-1$.

5. Fie $B=I_3+A$. Avem $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A^3=O_3$ şi astfel $A^n=O_3$, $\forall n\geqslant 3$.

Cu formula binomului lui Newton se obține:

$$B^n=C_n^0I_n^3+C_n^1A+C_n^2A^2=I_3+nA+\frac{n(n-1)}{2}A^2=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}^*.$$

6. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prin inducție se obține că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc.

7. a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bd & 0 & b(a+e) \\ 0 & c^2 & 0 \\ d(a+e) & 0 & e^2+bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ae & 0 & b(a+e) \\ 0 & c^2 & 0 \\ d(a+e) & 0 & e^2+ae \end{pmatrix}$.

Se obține $x = a+e$, $y = c^2 - ac - ce$.

b) Folosim metoda inducției matematice.

Pentru $n = 1$, $a_1 = x$, $b_1 = y$.

Presupunem că $A^k = x_k \cdot A + y_k I_3$. Atunci:

$$A^{k+1} = (x_k A + y_k I_3)A = x_k A^2 + y_k A = x_k(xA + yI_3) + y_k A = (x \cdot x_k + y_k)A + yx_k I_3$$

Aşadar există $x_{k+1} = x \cdot x_k + y_k$, $y_{k+1} = y \cdot x_k$ cu proprietatea că $A^{k+1} = x_{k+1}A + y_{k+1}I_3$ deci egalitatea are loc şi pentru $k + 1$. Aşadar are loc pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

8. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} = 4C$.

$C^3 = 4C^2 = 4^2 C$ şi prin inducție $C^n = 4^{n-1} C$.

9. Folosim metoda reducerii sau substituției.

a) $B = I_2 - A$ şi din a doua ecuație se obține că:

$$2A + 3I_2 - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ sau } A = 3I_2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rezultă $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

10. Egalitatea se scrie:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ sau}$$

$$\begin{pmatrix} 1+a^2 & 1+a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+1 \\ a+1 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ sau}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+3 & 2a+2 \\ 2a+2 & a^2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că $a = 1$.

11. Fie $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

Avem succesiv

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y+ix \\ z & t+iz \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y+it \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y+i(x+t) \\ 2z & 2t+iz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se obține $x = 1$, $z = 0$, $t = 1$ şi $2y+2i=4i$ deci $y = i$.

12. a) Se obține $\Delta=4x^2+x-5$ şi soluțiile $x\in\left\{1,-\frac{5}{4}\right\}$.

b) $\Delta=x^3+2x+3=(x+1)(x^2-x+3), x=-1$.

c) $\Delta=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 1-x & 1-x \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix}=(x-1)^2\cdot\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix}=(x-1)^2(x^2+2x+2), x\in\{1\}$

13. a) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 0 & a-x & b(x-a) \\ 0 & b-x & a(x-b) \end{vmatrix}=(a-x)(b-x)\begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix}=(a-x)(b-x)(b-a)$.

Se obține $x\in\{a,b\}$.

b) $\Delta=\begin{vmatrix} 2x+1 & x+1 & x+2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 12 & 6 & 6 \end{vmatrix}=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-x & b-a & x+a \\ x^2-b^2 & a^2-b^2 & b^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b-x & b-a \\ x^2-b^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}=(b-x)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x-b & -a-b \end{vmatrix}=$

$=(b-x)(b-a)(x-a)$.

Soluție $x\in\{a,b\}$.

14. Se pune condiția ca determinantul să fie nenul:

a) $\det(A)=a^3$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $\det(A)=a^3(1+a)(1+a^2)$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

16. $\det(A)=(x+m)(x+2m)-m(1-m)=x^2+3mx+3m^2-m$.

Se pune condiția ca $\det(A)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ deci $\Delta=9m^2-4(3m^2-m)<0$.

Se obține $m\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$.

17. Avem $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, iar $(A^4)^{-1}=(A^{-1})^4$.

18. $B^{-1}=\left[A^{-1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot A=$

$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

19. a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -4\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $\det(A)=1$ deci sistemul este un sistem Cramer.

Se obține $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}$, $\det(A)=-6$. deci sistemul este un sistem de tip Cramer.

Se obține $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Deoarece $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=-1$ rezultă că rang(A) = 3.

Primele 3 ecuații sunt ecuații principale, iar x, y, z necunoscute principale.

Sistemul principal are soluția $x = 4$, $y = 1$, $z = -3$ care nu verifică ecuația a patra. Aşadar sistemul este incompatibil.

Altfel, se arată că $rang(\overline{A})=4\neq rang(A)$.

20. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ m & 1 & -2\\ 2m-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Sistemul este nedeterminat dacă det(A) = 0. Se obține $m = 3$.

Pentru $m = 3$ se pune condiție ca $rang(\overline{A})=rang(A)=2$.

Se obține că $\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 1\\ 5 & 2 & 1 & n\end{pmatrix}$.

Punem condiția ca $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 5 & 2 & n\end{vmatrix}=0$. Se obține $n = 2$ şi $\alpha=9+4=13$.

21. $A=\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & m^2 & -1 \\ 2m & 0 & m+1 \end{pmatrix}$. Calculând determinanții de ordinul 3 se obțin rezultatele:

$$\Delta_1=(m+1)(m-2),\ \Delta_2=-(m-1)(m-2),\ \Delta_3=4m^2.$$

Se observă că nu pot fi nuli toți cei 3 determinanți deci rang(A) = 3.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & m-2 \\ m & m^2 & -1 & 2m^2 \\ 2m & 0 & m+1 & 2m^2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\overline{A})=\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & m-2 \\ m & m^2 & -1 & 2m^2 \\ 2m & 0 & m+1 & 2m^2 \end{vmatrix}.$$

Înmulțim cu m prima coloană şi adunăm rezultatul la a doua coloană. Rezultă:

$$\det(\overline{A})=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m-2 & 1 & m-2 \\ m & 2m^2 & -1 & 2m^2 \\ 2m & 2m^2 & m+1 & 2m^2 \end{vmatrix}=0$$

deoarece există două coloane egale.

Aşadar $rang(\overline{A})=3=rang(A)$ deci sistemul este compatibil pentru oricare $m\in\mathbb{R}$.

Răspuns corect c) $A=\varnothing$.

PARTEA a II-a

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

- **Capitolul 1. Limite de funcţii**
  - 1.1. Mulţimi de puncte pe dreapta reală
  - 1.4. Calculul limitelor de funcţii
    - 1.4.3. Limitele funcţiilor trigonometrice
  - 1.5. Operaţii cu limite de funcţii
  - 1.6. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii
    - 1.6.4. Limite fundamentale în calculullimitelor de funcţii
  - 1.7 Asimptotele funcţiilor reale
  - *Teste de evaluare*

- **Capitolul 2. Funcţii continue**
  - 2.1. Funcţii continue într-un punct
  - 2.2. Operaţii cu funcţii continue
  - 2.3. Semnul unei funcţii continue pe un interval
  - *Teste de evaluare*
- **Capitolul 3. Funcţii derivabile**
  - 3.1. Derivata unei funcţii într-un punct
  - 3.2. Derivatele unor funcţii elementare
  - 3.3. Operaţii cu funcţii derivabile
    - 3.3.5 Derivarea funcţiilor inverse
  - 3.4. Derivata de ordinul doi
  - 3.5 Regulire lui l'Hôspital
  - *Teste de evaluare*
- **Capitolul 4. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor**
  - 4.1 Rolul derivatei întâi în studiul funcţiilor
  - 4.2. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor
  - 4.3. Reprezentarea grafică a funcţiilor
  - *Teste de evaluare*

Probleme recapitulative

PARTEA a II-a. Elemente de analiză matematică

Capitolul 1. Limite de funcţii

1.1. Mulţimi de puncte pe dreapta reală

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 113 manual**

Exersare

E1. Să se determine mulţimile de minoranţi şi majoranţi pentru mulţimile:

a) $A=(-3, 5]$; b) $A=(-2, 3)$; c) $A=[-5, 4]$;

d) $A=(-2, 1)\cup(3, 5)$; e) $A=(1, 5]\cup[6, 11]$; f) $A=[-1, 1)\cup\{3\}$.

E2. Să se determine mulţimea minoranţilor şi mulţimea majoranţilor pentru mulţimile:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-3x=0\right\}$; b) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-3x\leqslant 0\right\}$;

c) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-3}\leqslant 2\right\}$; d) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-3|\leqslant 1\right\}$;

e) $A=\left\{x\in(0, \infty)\,\middle|\,2^{x-3}\leqslant 0,25\right\}$; f) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,0,125\leqslant 4^x\leqslant 0,25\right\}$;

g) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\log_2(x-1)\leqslant 2\right\}$; h) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\log_2(x-1)\leqslant\log_4(3-x)\right\}$.

E3. Să se arate că următoarele mulţimi sunt mulţimi mărginite:

a) $A=\left\{\sin x\mid x\in\mathbb{R}\right\}$; b) $A=\left\{\frac{2n}{n+1}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$;

c) $A=\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$; d) $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{48}{n+1}\in\mathbb{N}\right\}$;

e) $A=\left\{\frac{2}{x^2+1}\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}$; f) $A=\left\{\frac{x+1}{x^2+x+1}\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}$.

E4. Să se scrie cu ajutorul intervalelor mulţimile:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|\leqslant 3\right\}$; b) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-1|\leqslant 2\right\}$;

c) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-2|\geqslant 1\right\}$; d) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{1}{x}\leqslant 1\right\}$;

e) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{x-1}{x^2-4}\geqslant 0\right\}$; f) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{x^2-4}{x^2-9}\leqslant 1\right\}$;

g) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,2^{x+1}\leqslant 16^x\cdot(0{,}25)^{x+1}\right\}$; h) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-3}\leqslant x-3\right\}$.

E5. Să se precizeze care dintre mulţimile următoare sunt vecinătăţi ale numărului $x_0=0$, respectiv $x_1=-1$;

a) $V_1=(-5, 7)$; b) $V_2=(-1, 0)$; c) $V_3=(0, \infty)$;

d) $V_4=(-1, \infty)$; e) $V_5=\mathbb{N}$; f) $V_6=\mathbb{Z}$;

g) $V_7=\mathbb{Q}$; h) $V_8=\mathbb{R}$; i) $V_9=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

E6. Să se precizeze care dintre mulţimile următoare sunt vecinătăţi pentru $+\infty$:

a) $V_1 = (-6, \infty)$; b) $V_2 = (100, \infty)$; c) $V_3 = (\sqrt{2}, \infty)$;

d) $V_4 = (-\infty, 10)$; e) $V_5 = \mathbb{Z}$; f) $V_6 = \mathbb{Q}$;

g) $V_7 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; h) $V_8 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; i) $V_9 = \mathbb{R}$;

E7. Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulţimile:

a) $A = [0, 3)$; b) $A = \{0, 3\}$; c) $A = (-\infty, 3)$;

d) $A = (-2, 2) \cup (3, 5)$; e) $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; f) $A = (1, 2) \cup \{5\}$.

E8. Să se demonstreze că următoarele mulţimi sunt nemărginite (inferior sau superior):

a) $A = (-\infty, 3]$; b) $A = (-1, \infty)$;

c) $A = \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$; d) $A = \left\{\frac{1}{x} \,\middle|\, x \in (0, 1)\right\}$;

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \geq 2\}$; f) $A = \left\{\frac{x-1}{x-2} \,\middle|\, x \in (2, \infty)\right\}$;

g) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \text{ divide } x\}$.

1.4. Calculul limitelor de funcţii

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 134 manual**

Exersare

E1. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 3} 3$; b) $\lim\limits_{x\to 0} 5^3$; c) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \sqrt[3]{3}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)$;

e) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\frac{x}{\pi}+1\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-x+2)$; g) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5^3+1)$; h) $\lim\limits_{x\to-1}\ln 3$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x+1)^2+1\right]$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x+(x-1)^2\right]$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3)$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x+2+x^2)$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x-7x^2)$; f) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x})$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_3 x$; h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_{0,3} x$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2^{\log_2 x})$; b) $\lim\limits_{x\to 0} 3^{\log_3(x^2+1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 5}\log_5 2^x$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

E4. Să se studieze existenţa limitei funcţiei f în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x^2+3, & x\leq 1\\ 5x-1, & x>0\end{cases},\ x_0\in\{1, 2\}$;

b) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+3, & x\in(0, 1)\\ 4^x, & x\in(1, +\infty)\end{cases},\ x_0\in\{1, 0, +\infty\}$.

Sinteză

S1. Să se determine parametrii reali pentru care:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(a-1)x+3\right]=6$; b) $\lim\limits_{x\to 3}(5+6ax)=23$;

c) $\lim\limits_{x\to a}(ax+3x-3)=5$; d) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=3$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}(a^2x^2+2ax+11)=a+14$; f) $\lim\limits_{x\to a+1}\sqrt[3]{x}=3$;

g) $\lim\limits_{x\to a-1}\sqrt{x}=a-1$; h) $\lim\limits_{x\to a}2^{ax}=16$.

S2. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ pe domeniul de definiţie:

a) $f:(0, 1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x\in\left(0, \frac{1}{2}\right)\\ 2x-2, & x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right)\end{cases}$;

b) $f:(0, 2)\cup\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2^x, & x\in(0, 1)\\ \log_2 x, & x\in[1, 2]\\ 0, & x=3\end{cases}$.

S3. Să se determine constantele reale pentru care funcția f are limită în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} ax^2+(a+2)x, & x\leqslant 1\\ \sqrt[3]{x}, & x>1\end{cases},\ x_0=1;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} (x+a)^2+(x-1)^2, & x\leqslant 1\\ (x-1+a)(x+4-a), & x>1\end{cases},\ x_0=1;$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\leqslant 2\\ \log_2 x, & x\in(2,4)\\ ax^2+bx+6, & x\geqslant 4\end{cases},\ x_0\in\{2,4\};$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2^{ax}, & x\leqslant 1\\ 4^{bx}, & x\in(1,3)\\ 8^{(a+2)x}, & x\geqslant 3\end{cases},\ x_0\in\{1,3\}.$

S4. Să se studieze existența limitei funcției $f:D\to\mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|,\ x_0\in\{-1,0,1\};$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-3|,\ x_0\in\{0,3,4\};$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-3|+x,\ x_0\in\{-5,3,5\};$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} |x|, & x\leqslant 1\\ \sqrt{x}, & x>1\end{cases},\ x_0\in\{0,1\};$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} |x^2-1|, & x\leqslant 2\\ \sqrt{x^2}+1, & x>2\end{cases},\ x_0\in\{-1,1,2\}.$

1.4.3. Limitele funcţiilor trigonometrice

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 140 manual**

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \cos x$; c) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} \sin x$; d) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}} \cos x$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} \sin x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x>\pi}} \cos x$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x>2\pi}} \sin x$; h) $\lim\limits_{\substack{x\to-\pi\\ x<-\pi}} \cos x$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x$; b) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x$; c) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x>\pi}} \operatorname{tg} x$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$; g) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x$; h) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$;

i) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} \operatorname{ctg} x$; j) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\pi\\ x>2\pi}} \operatorname{ctg} x$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \arcsin x$; b) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \arccos x$; c) $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x$;

d) $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x$; e) $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos x$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arctg} x$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arcctg} x$; c) $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arctg} x$;

d) $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{arcctg} x$; e) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{3}\\ x>\sqrt{3}}} \operatorname{arctg} x$.

Sinteză

S1. Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care au loc egalităţile:

a) $\lim\limits_{x\to a} \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$; b) $\lim\limits_{x\to a} \arccos x = 0$; c) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{4}$;

d) $\lim\limits_{x\to a} \arcsin x = \dfrac{\pi}{4}$; e) $\lim\limits_{x\to a} \arccos x = \pi$; f) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{4}$.

S2. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases},\ x_0 \in \{0, -\infty, +\infty\}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant \pi \\ 3(x-\pi)^2, & x > \pi \end{cases},\ x_0 \in \{0, \pi, 2\pi\}$;

c) $f:[-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \arccos x, & x \in [-1, 0) \\ x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}, & x \in [0, 1] \end{cases},\ x_0 \in \{-1, 0, 1\}$;

d) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \leqslant 0 \\ \arcsin x, & x \in (0, 1) \\ \operatorname{arcctg} x, & x \in [1, +\infty) \end{cases},\ x_0 \in \{-\infty, 0, 1, +\infty\}$.

S3. Să se determine valorile parametrilor reali, pentru care funcţia $f:D \to \mathbb{R}$ are limită pe domeniul de definiţie.

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0 \\ ax + b, & x \in (0, 1) \\ \operatorname{arctg} x, & x \geqslant 1 \end{cases}$

b) $f:[-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a, & x \in [-2, -1) \\ \arcsin x, & x \in [-1, 1] \\ b, & x \in (1, 2] \end{cases}$;

S4. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin|x|,\ x_0 \in \{-1, 0, 1\}$;

b) $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = |\sin x|,\ x_0 \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$;

c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |-\cos x|,\ x_0 \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$;

d) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |\operatorname{arctg} x|,\ x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

1.5. Operaţii cu limite de funcţii

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 151 manual**

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2-3x+\sqrt{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-1+\ln\dfrac{x}{3}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to \pi}(\sin x+3\cos x)$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2^x+3^x-4^x\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 9}(3x^2-27x+\log_3 x)$; f) $\lim\limits_{x\to -1}\left(2^x+3^x-\sqrt[3]{x}\right)$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2\log_3 x\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2^x\right)\sqrt[3]{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2^x}{8}\cdot\dfrac{3^x}{27}\right)$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x+1\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(1-\cos x)(1+\sin x)$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-10}{2x-3}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\sin x+\sqrt{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$; e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x+\operatorname{tg}x}{\sin x+2}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin x+\arccos x}{\pi+\operatorname{arctg}x}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)^{\sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x)^{1+x}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x-1\right)^{x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to \pi}(1+\sin x)^{\cos x}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x>\pi}}(\sin x+\operatorname{tg}x)^{\pi+x}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}(\operatorname{arctg}x)^{\sqrt{x}}$.

Sinteză

S1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}\right)^4$; c) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\sin x+\cos x)^2$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\operatorname{tg}x)^{x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{x^2-x+1}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2^x-3^x+1\right)^{\sqrt{x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2\arcsin x+\arccos x)^x$; h) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\operatorname{arcctg}x}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos x}{1+\arcsin x}$.

S2. Să se determine constantele reale pentru care au loc egalităţile:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a\pi+\arcsin x}{\pi+\arccos x}=2$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2+(x-2)^2}{a+\sqrt[3]{x}}=1$;

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}+2x}{2+\sqrt{x}}=1$; d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2^x+4^x}{2\cdot 2^x+3\cdot 4^x}=\dfrac{3}{8}$.

S3. Să se studieze existenţa limitelor funcţiei $f{:}D\to\mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{tg}x,\ x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin x,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)\end{cases}$, $x_0\in\left\{0,\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

b) $f(x)=\begin{cases}(x-1)\sqrt{x},\ x\in(0,1) \\ \left(1-\sqrt[3]{x}\right),\ x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)\end{cases}$, $x_0\in\{0,1\}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-1}{x^2+x+1}\right)^3,\ x\in(-\infty,0] \\ (-1+\sin x)^3,\ x\in(0,+\infty)\end{cases}$, $x_0=0$.

S4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(\sin x)\sqrt[3]{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\ln(x+1)\right)^2$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}(2^x-1)\lg(x+8)$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{7x}+\sqrt{x}\right)^5$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}}{1+2^{x+1}}$; f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt[3]{10-x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x\sin x)}{1+\sin(\arccos x)}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\log_2\left(2+\log_3(x+9)\right)$.

S5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]+[3x]}{x}$.

1.6. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 160 manual

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{3x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2}{3x+x^2+1}$; d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+2}{4x^2-3}$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{2}{x}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\dfrac{x}{2x+2}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{3x+1}{x^2-1}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\dfrac{2x}{x^2-16}$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{2x^2+3x-4}{x^2-3x+2}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\dfrac{5x^2-19}{x^2+3x+2}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2}{(x+1)^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-4}{x^2-4x+4}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6x}{-x^2+6x-9}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+11}{x^2(x+1)}$; f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x+3}{1+2x+x^2}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-4}{9x^2-9}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-7x+12}$; e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x}$; f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{2x^2+4x}$.

E5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+3}{-x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4-x^2}{2x^2+x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x+11}{6x-11}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-x^2}{3x^2+4x+11}$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+6x+3}{2x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^2-3x+11}{2x+6}$;

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2}{4x^2+6x+1}$; h) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2}$.

E6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3+x}}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{4x^2+3}}$; c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{2x+3}$; e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{2\sqrt{x^2-1}+x}$; f) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x-1}+\sqrt{4x+1}}$;

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-1}{\sqrt{9x^2-x+7}}$; h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+5}}{3x-4}$.

Sinteză

S1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2-4}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^3-|x-1|^3-8}{x^2-3x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)^2+(x-1)^2-10}{(x-2)^2+(x-1)^2-1}$; d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{(x-3)^2+x^2-9}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)^2-(x-1)^2+x^2-2}{2x^2-3x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)^2+(x+1)^2-4}{4x^2-(x+3)^2}$.

S2. Să se determine limitele funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-2}, & x\in(-\infty,2)\\ \dfrac{-x^2}{x^2-4}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$, $x_0=2$; b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2x^2-x-2}, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{x^2-4x+3}{9(x-1)}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$, $x_0=1$.

S3. Să se studieze constantele reale pentru funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are limită finită în punctele specificate:

a) $f(x)=\dfrac{2x+a}{x-1}$, $x_0=1$; b) $f(x)=\dfrac{3x+ax^2}{x-3}$, $x_0=3$;

c) $f(x)=\dfrac{(x-a)^2-4}{x^2-1}$, $x_0=1$; d) $f(x)=\dfrac{x-a^2}{x-1}+\dfrac{2x+a^2}{x^2-1}$, $x_0=1$.

S4. Să se calculeze limitele de funcţii:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^2-5x+3}+\dfrac{6x^2-x-5}{4x^2-3x-1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{5x^2-4x-12}-\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-16}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{(x+1)^2+x^2-1}{x^2+3x+2}+\dfrac{(x-1)^2+3x-1}{2x^2+3x+1}\right)$.

S5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x^2+4x+1}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+3}{2x^2+6x+1}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+4x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+4x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1.6.4. Limite fundamentale în calculul limitelor de funcţii

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 167 manual**

Exersare

E1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{6x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{(x+1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(4x)}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$; g) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(1-x^2)}{2x+2}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{\sin(x^2-1)}$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)\pi}{(x^2-1)}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\operatorname{tg}(3x-9)}{x^2-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(x-\pi)}{\operatorname{tg}(x-\pi)}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x^2-1)}{\sin(x^2-x)}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)^2}{(x-1)\sin(x^2-1)}$;

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)}{5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2)}{x^2+x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(10x)}{\arcsin(5x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(5x)}{\sin(10x)}$; e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{arctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{16x^2-\pi^2}$; f) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{\operatorname{arctg}(9x^2-1)}{\arcsin(3x+1)}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{5x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{8x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x^2)}{x^2+x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\ln(1+8x)}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{5x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+3x^2)}$.

E5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{6x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-1}{x^2+x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{8^x-8}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^{x+1}-8}{x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{2^x-1}$.

Sinteză

S1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 9x}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+3\sin 5x+x}{x+x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{tg}x)}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{2x}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-4x+3)}{\sin(3x-4x+1)}$; f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}(x^2+x-2)}{\operatorname{tg}(x^2+5x+6)}$;

g) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\arcsin\left(x^2-1\right)}{\arcsin\left(x^2+x\right)}$; h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-6x+5\right)}{\arcsin\left(x^2+4x-5\right)}$.

S2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\sin 5x \sin 3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x-5\sin x}{\sin 4x-2\sin 3x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\arcsin x)}{\sin(\operatorname{arctg} x)}$.

S3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-3^x)}{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x\sin x)}{\ln(1+x\sin 5x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+\ln(x+1))}{\ln(1+\ln(x^2+1))}$.

S4. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, dacă $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax-\sin ax}{\operatorname{tg} bx-\sin bx}=\dfrac{1}{8}$.

S5. Pentru care valori ale lui $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx}{x+x^2}=14$?

S6. Să se determine constantele reale pentru care au loc egalităţile:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x+2}-ax\right)=3+b$; b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x^2+3x+a}{x-1}-bx\right)=a$;

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x}-ax-b\right)=\dfrac{3}{2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin xa}{(x+2)\sin 3x}=2$;

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{a\ln(4-x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2^x-8}{x^2-9}$; f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4}=\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-a^2}$.

1.7 Asimptotele funcţiilor reale

Enunţuri Exerciţii şi probleme **pag. 176 manual**

Exersare

E1. Să se determine asimptotele orizontale ale funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\frac{1}{x}$; b) $f(x)=\frac{1}{x-3}$; c) $f(x)=\frac{x}{4-x}$;

d) $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$; e) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; f) $f(x)=\frac{2x}{3x+5}$;

g) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$; h) $f(x)=\frac{3x^2-1}{2x^2+x+1}$; i) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2+x+1}$.

E2. Să se determine asimptotele verticale ale funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\frac{1}{x-1}$; b) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$; c) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$;

d) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$; e) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$; f) $f(x)=\ln(x+1)$;

g) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; h) $f(x)=\frac{2}{2^x-1}$.

E3. Să se determine asimptotele oblice ale funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$; b) $f(x)=\frac{2x^2+x}{x-1}$; c) $f(x)=\frac{1-x^2}{2+x}$;

d) $f(x)=\frac{x^2+2|x|}{x-1}$; e) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; f) $f(x)=\frac{x^2-2|x|}{2x-1}$.

Sinteză

S1. Să se determine asimptotele funcţiiilor $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-3)}$; b) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2-1}$; c) $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)(x-5)}$;

d) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$; e) $f(x)=\frac{x^2}{|x^2-1|}$; f) $f(x)=\frac{x^2}{|x-1|}$;

g) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-|x|}$; h) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$.

S2. Să se determine asimptotele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=x\cdot 2^{\frac{1}{x}}$; b) $f(x)=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$;

c) $f(x)=(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; d) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}$.

S3. Să se determine parametrii reali pentru funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-ax+a+1}$ are o singură asimptotă verticală.

S4. Să se determine parametrii reali pentru care funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, admite asimptota indicată:

a) $f(x)=\dfrac{ax^2+2a+bx}{x-1}$, $y=a^2x+2$; b) $f(x)=\dfrac{(x+a)(x+a+1)}{x+a+2}$, $y=x-a+3.$

pag. 177 manual

Teste de evaluare

Testul 1

1. Dacă $\ell_1=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$, $\ell_2=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2-3}$, atunci $\ell_1+\ell_2$ este egal cu:

a) 1; b) 3; c) $+\infty$; d) $-\infty$

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-5x+4)}{\sin(x-1)}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{2x+1}$.

3. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+ax+3}{x}$. Dacă dreapta $y=bx+2$ este asimptotă a funcţiei *f*, atunci

a) $a+b=3$; b) $a\cdot b=3$; c) $2a+b=3$; d) $a^2+b^2=3.$

Testul 2

1. Să se calculeze limitele de funcţii:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x}{\sin x\, arctg\, x}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x-1}$.

2. Dacă $l_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-a^x}{x}=1$, atunci:

a) $a=2$; b) $a=4$; c) $a=3\cdot e^{-1}$; d) $a=1$.

3. Funcţia $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2+2bx+1}$ are o singură asimptotă dacă:

a) $a=b=0$; b) $a=b=1$; c) $a\in\mathbb{R}, b\in(-1,1)$; d) $b\in\mathbb{R}$, $a=7$.

Testul 3

1. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-3^x)^2}{x\sin x}$.

2. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=4$.

3. Să se determine valorile parametrului real a ştiind că dreapta $y=ax+a+1$ este asimptotă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+a^2}$

4. Să se studieze dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $2f(x)+3f(-x)=x^2-1, \forall x\in\mathbb{R}$, are limită în oricare punct $x_0\in\mathbb{R}$.

Testul 4

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^3+a^3, x\le a\\ x+1, \quad x>a\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia f are limită în oricare $x_0\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2+ax+3, x\le 1\\ \dfrac{3x+b}{x^2+2}, \quad x>1\end{cases}$.

Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât f să aibă limită în $x=1$ şi să existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

3. Fie $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx-1},\ a,b\in(0,+\infty), c\in\mathbb{R}$. Să se deter- mine parametrii a, b, c astfel încât dreapta $y=2x+1$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$, iar $y=-1$ să fie asimptotă spre $-\infty$.

Capitolul 2. Limite de funcţii

2.1. Funcţii continue într-un punct

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 183 manual

Exersare

E1. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x)=x^2-7x,\ x_0\in\{-1,0,1\}$; b) $f(x)=x+2|x|,\ x_0\in\{-1,0,2\}$;

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1},\ x_0\in\{-2,1\}$; c) $f(x)=x-\sqrt{x},\ x_0\in\{0,4\}$.

E2. Să se studieze continuitatea funcţiilor în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}, x_0=1$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ x+1, & x\ge 0\end{cases}, x_0=0$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\le 0\\ \dfrac{\arcsin x}{x}, & x\in(0,1),\ x_0\in\{0,1\},\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$

d) $f:\{-1\}\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3, & x=-1\\ 3+x, & x\in(0,1),\ x_0\in\{-1,1\}.\\ \dfrac{x+3}{2x-1}, & x\ge 1\end{cases}$

E3. Să se studieze natura punctelor de discontinuitate pentru funcţia $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2, & x\le 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}2^x-2, & x\le 0\\ 3^x-2^x, & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1}, & x<1\\ 3x-1, & x\ge 1\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ 2, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$.

E4. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, în funcţie de parametrii reali:

a) $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\le 1\\ x^2+x+1, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}2^x+2^a, & x\le 0\\ ax+3, & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{2x}, & x<0\\ 2a^2, & x=0\\ 5x+2a, & x>0\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2ax+1, & x\le 0\\ x+a, & x\in(0,1)\\ 3x+b, & x\ge 1\end{cases}$.

S1. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax+x^2)}{x}, & x<0\\ \ln(x+e^3), & x\geq 0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{6x^2+4a^2+4ax}, & x\leq 1\\ x^2+4a, & x>1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2a+\dfrac{\arcsin x}{x}, & x\in[-1,0)\\ \dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & x>0\\ -1+\sin a\pi, & x=0\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2^x+a, & x\leq a\\ 3^x+a, & x>a\end{cases}$.

S2. Să se determine constantele reale pentru care funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă, în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}9^{ax}-4\cdot 3^{ax+1}+12, & x\leq 1\\ a-ax-15x^2, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}3^{bx}+2x, & x\leq 2a-1\\ 9x-4^{bx}, & x\geq a^2\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2^{ax}\cdot 3^{bx}, & x<1\\ 12, & x=1\\ 3^{ax-1}\cdot 2^{1+bx}, & x>1\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+3^{bx}, & x<1\\ x^2-3x+7, & x\in[1,2]\\ 2^{ax}+3^{bx}-8, & x>2\end{cases}$.

S3. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă şi are loc condiţia data:

a) $f(x)=\begin{cases}3x^2-x, & x<1\\ ax^2+bx+3, & x\geq 1\end{cases}$ şi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ există;

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{x}, & x\leq 0\\ ax+b, & x\geq 0\end{cases}$ şi există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

2.2. Operaţii cu funcţii continue

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 187 manual

Exersare

E1. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f,g:D\to\mathbb{R}$ şi a funcţiilor $f+g, f-g, f\cdot g, \frac{f}{g}$, în cazurile:

a) $f(x)=x-1,\ g(x)=x+1;$ b) $f(x)=x^2-1,\ g(x)=3x-x^2;$

c) $f(x)=2^x,\ g(x)=x;$ d) $f(x)=\ln x;\ g(x)=\ln\frac{1}{x};$

e) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases},\ g(x)=x-1;$

f) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 0\\ x-1, & x>0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}1-x, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}.$

E2. Să se studieze continuitatea funcţiilor compuse $f\circ g$ şi $g\circ f$ în cazul funcţiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) $f(x)=x-1, g(x)=2x-3;$ b) $f(x)=x^2+1,\ g(x)=x-1;$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ g(x)=x-1;$ d) $f(x)=\ln(x^2+1),\ g(x)=2x-1.$

Sinteză

S1. Se dau funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x+a, & x\le 0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2ax, & x\le 0\\ x-x^2, & x>0\end{cases}.$

Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f+g$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

S2. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi f^2 în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases};$ b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ -1, & x>1\end{cases};$

c) $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\le 1\\ 2x+1, & x>1\end{cases};$ d) $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le 2\\ x+a, & x>2\end{cases}.$

S3. Să se studieze continuitatea funcţiei $f\circ g$ în cazurile:

a) $f(x)=2x-4,\ g(x)=\operatorname{sgn}(x), x\in\mathbb{R};$ b) $f(x)=3x-6,\ g(x)=|x-1|,\ x\in\mathbb{R};$

c) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ 2, & x>1\end{cases}, g(x)=2x-1, \in\mathbb{R};$ d) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}a^2, & x\le 1\\ x, & x>1\end{cases}.$

S4. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f\circ g,\ g\circ f$:

a) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}\ln x, & x>1\\ x, & x\le 1\end{cases};$

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 0\\ \sqrt[3]{x}, & x<0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0\\ 1+x^3, & x<0\end{cases}.$

2.3. Semnul unei funcţii continue pe un interval

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 191 manual

Exersare

E1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3+1$. Să se arate că f are proprietatea lui Darboux pe intervalele $I_1=(-2,2)$ şi $I_2=[0,3]$. Există intervale pe care f nu are proprietatea lui Darboux?

E2. Să se stabilească dacă funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul dat:

a) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0\end{cases}, I=[-1,1]$;

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x\in(-1,0) \\ x+\cos x, & x\in[0,+\infty)\end{cases}, I=(-1,2]$;

c) $f(x)=\begin{cases} \arcsin x, & x\in[-1,0] \\ x+3^x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}, I=\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$.

E3. Să se stabilească semnul funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-x$; b) $f(x)=2^x-1$;

c) $f(x)=3^{x+1}-9$; d) $f(x)=\sin x,\ x\in[0,2\pi]$.

Sinteză

S1. Să se arate că funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$, au proprietatea lui Darboux pe oricare interval din domeniul de definiţie:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}, & x>1 \\ 0{,}25, & x=1 \\ \dfrac{\sin(4x-4)}{8x^2-8}, & x\in(0,1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x^2+5x-6, & x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}\sin(x-1)}{3(x^2-1)}, & x>1\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} 0, & x=2 \\ \left(1+3^{\frac{1}{x-2}}\right)^{-1}, & x>2\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Z} \\ \sin(\pi x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$.

S2. Folosind consecinţa 1 a proprietăţii lui Darboux, să se arate că următoarele ecuaţiile au cel puţin o soluţie pe intervalul dat:

a) $x^3+4x^2-5=0, I=[0,2]$; b) $x^3+5x-27=0, I=[0,3]$;

c) $x+2^x-2=0, I=[0,1]$; d) $x+1+\sin x=0, I=\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$;

e) $x+\ln x=0, I=(0,1)$.

S3. Să se stabilească semnul funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x(2^x-1)$; b) $f(x)=(x-1)(3^x-2^x)$;

c) $f(x)=(3^x-1)\log_2(x+2)$; d) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{x-2}$;

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-3}$; f) $f(x)=(x^3-x)(x^4-16)$.

S4. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $(2^x-1)(x^2-1)\geq 0$; b) $(x-x^3)(1-\sqrt{x+1})\leq 0$;

c) $\left(x-1+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\leq 0$; d) $(2^x-3^x)\left(2-\log_2(x+1)\right)\leq 0$.

S5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$.

a) Să se arate că funcţia *f* este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

b) Folosind proprietatea lui Darboux, să se arate că funcţia *f* este surjectivă.

pag. 192 manual

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se studieze continuittea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}, x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}\\ 1, \quad x\in\{-1,0,1\}\end{cases}.$$

2. Să se determine parametrul real pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x+2^{ax}, x\leq 1\\ 4^{ax}-1, x>1\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}$.

3. Să se stabilească semnul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\left(2^{x-1}-1\right)(3^{x-1}-9).$$

Testul 2

1. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}, & x\in(-\infty,0)\\ ax+b, & x\in[0,1]\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ în funcţie de parametrii reali a şi b.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

a) Fie $I=[2,3]$. Există valori ale lui $x\in I$ pentru care $f(x)=3{,}5$?

b) Funcţia f are proprietatea lui Darboux pe I?

3. Să se rezolve inecuaţia $(2^x-16)(x-x^3)\le 0$.

Testul 3

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x[x]$.. Să se studieze continuitatea funcţiei f în $x_0\in\mathbb{Z}$.

2. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+a+x, & x\le a\\ 2x+ax^2, & x>a\end{cases}$ pentru $a\in\mathbb{R}$.

3. Să se stabilească semnul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2^x-2^a)(x-a)$ în funcţie de valorile parametrului real a.

Testul 4

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, dată de relaţia $f(n)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2 2^x+3^{-x}}{2^x n+2^{-x}}$.

Să se calculeze suma $f(1)+f(2)+...+f(n)$.

2. Să se arate dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcţie continuă şi $f(x)\ge a, f(b)\le b$, atunci există $x_0\in[a,b]$ cu proprietatea că $f(x_0)=x_0$.

3. Să se studieze semnul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}(2^x-2)(\log_2 x-1), & x>0\\ x^3-x, & x\le 0\end{cases}$.

Capitolul 3. Funcţii derivabile

3.1. Derivata unei funcţii într-un punct

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 202 manual**

Exersare

E1. Să se stabilească dacă graficul funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ admite tangentă în punctul specificat, dacă:

a) $f(x)=3x^2-4x,\ x_0=2;$ b) $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x,\ x\le 0\\ 5x^2-3x,\ x>0\end{cases},\ x_0=0;$

c) $f(x)=x+|x-1|,\ x_0=1;$ d) $f(x)=x^2|x|,\ x_0=0.$

E2. Să se arate că funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ are derivată în punctul specificat şi să se calculeze aceasta:

a) $f(x)=3x+11,\ x_0=-1;$ b) $f(x)=x^2-3x-11,\ x_0=2;$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x+5},\ x_0=0;$ d) $f(x)=\sqrt{x+1},\ x_0=0;$

e) $f(x)=2^x+3,\ x_0=-1;$ f) $f(x)=\sin x+\sin 2x,\ x_0=0.$

E3. Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ în punctul specificat şi să se scrie ecuaţia tangentei în acest punct:

a) $f(x)=2x-x^2,\ x_0\in\{0,1,2\};$ b) $f(x)=x^3,\ x_0\in\{0,1,-1\};$

c) $f(x)=\sin x+x,\ x_0\in\{0,\pi\};$ d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ x_0\in\{-1,0,1\}.$

E4. Să se determine derivatele laterale ale funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ în punctele date:

a) $f(x)=|x-1|,\ x_0=1;$ b) $f(x)=x+|x|,\ x_0=0;$

c) $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x\le -1\\ x^2-1, x>-1\end{cases}, x_0=-1$ d) $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x),\ x\le 1\\ \ln x,\quad x>1\end{cases}, x_0=1.$

Sinteză

S1. Să se studieze dacă următoarele funcţii $f:D\to\mathbb{R}$ admit tangentă la grafic în punctele specificate:

a) $f(x)=\begin{cases}x+|x|+1,\ x<0\\ \cos x,\quad x\ge 0\end{cases}, x_0\in\{-1,0,1\};$

b) $f(x)=\begin{cases}e^{x+1},\quad x\ge -1\\ \dfrac{1+e^{x+1}}{2},\ x<-1\end{cases}, x_0\in\{-1,0\};$

c) $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}-1,\quad x\le 0\\ \ln(1+2x),\ x>0\end{cases}, x_0\in\{-1,0,2\}.$

S2. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, & x<0\\ 2x-1, & x\geq 0\end{cases}, x_0=0;$

b) $f(x)=\begin{cases}4x-a, & x>2\\ x^2+ax+b, & x\leq 2\end{cases}, x_0=2;$

c) $f(x)=\min(x,2x-1), x_0=1$;

d) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}+a, & x\geq 1\\ \arccos x+b, & x\in[0,1)\end{cases}, x_0=1.$

S3. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D$, punct de continuitate al funcţiei f. Punctul $M(x_0,f(x_0))$ se numeşte *punct unghiular* al graficului funcţiei f dacă funcţia f are derivate laterale diferite în x_0 şi cel puţin una dintre ele este finită.

Să se studieze dacă punctul de abscisă x_0 este punct unghiular în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\leq 1\\ x^2+x-1, & x>1\end{cases}, x_0=1;$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leq 0\\ e^x, & x>0\end{cases}, x_0=0;$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ \sin x, & x\geq 0\end{cases}, x_0=0.$

S4. Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi x_0 punct de continuitate al funcţiei f. Punctul $M(x_0,f(x_0))$ se numeşte *punct de întoarcere* al graficului funcţiei f dacă funcţia f are derivate laterale în x_0 infinite şi de semne contrare.

Să se determine dacă punctul de abscisă x_0 este punct de întoarcere în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\leq 1\\ \sqrt{x-1}, & x>1\end{cases}, x_0=1;$ b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}, & x\geq 3\\ 2\sqrt{3-x}, & x<3\end{cases}, x_0=3.$

S5. Să se determine parametrii reali pentru care graficele funcţiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admit tangentă comună în punctul de abscisă $x_0\in\mathbb{R}$.

a) $f(x)=2x+a, g(x)=x^2+bx+b, x_0=1;$

b) $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=2x^2-x+1, x_0=1.$

S6. Se dau funcţiile $f,g:D\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^3+ax^2+b, g(x)=3x^2+cx+1.$

Să se determine:

a) $c\in\mathbb{R}$ pentru care tangenta la graficul funcţiei g în punctul de abscisă $x_0=1$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=7x-6$.

b) $a,b\in\mathbb{R}$, ştiind că tangenta în punctul $x_0=1$, la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta $y=5x+1$, iar în punctul de abscisă $x_0=-1$, tangenta are ecuaţia $y=x+5$.

S7. Se dau funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+ax+b,\ g(x)=x^2+bx+a$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care graficele celor două funcţii admit tangentă comună.

3.2. Derivatele unor funcţii elementare

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 209 manual

TEMĂ

1. Aplicând formulele obţinute, să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2007, x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=5\sqrt{2}, x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\sin 5, x\in\mathbb{R}$; d) $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$;

e) $f(x)=x^{2007}, x\in\mathbb{R}$; f) $f(x)=\log_3 x, x\in(0,+\infty)$;

g) $f(x)=\log_{0,3} x, x\in(0,+\infty)$; h) $f(x)=2^x, x\in(0,+\infty)$;

i) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}, x\in\mathbb{R}$; j) $f(x)=\log_3(5x^2)-\log_3(5x), x>0$;

k) $f(x)=x^{\frac{7}{3}}, x>0$; l) $f(x)=e^{2x}, x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4^x$, să se calculeze $f'(0), \left(f(1)\right)', f'(-1)$.

3. Pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$, să se calculeze

$$f'(-1),\ \left(f(-1)\right)',\ f'(27),\ \left(f(27)\right)',\ f'\left(\frac{1}{8}\right),\ \left(f\left(\frac{1}{8}\right)\right)'.$$

3.3. Operaţii cu funcţii derivabile

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 213 manual**

Exersare

E1. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3+3x+1$; b) $f(x)=2x-x^4$;

c) $f(x)=x+2\sqrt{x}$; d) $f(x)=x^3+\sin x+\cos x$;

e) $f(x)=2x^3+\ln x$; f) $f(x)=2^x+3^x-x$;

g) $f(x)=\log_2 x+\log_3 x$; h) $f(x)=4\sin x-5\cos x+\sqrt{3}$;

i) $f(x)=x^2+\log_3 x+\sin x$; j) $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{2}+\operatorname{tg}x$;

k) $f(x)=(x-1)^2+(x+1)^2$; l) $f(x)=2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}+\log_{0,5}x$;

m) $f(x)=\log_3 x^3+\log_2 x^4$; n) $f(x)=2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$;

p) $f(x)=x\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}x$; q) $f(x)=2^{x+1}+3^{x-1}$.

E2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x\log_2 x$; b) $f(x)=x^2\sqrt{x}$;

c) $f(x)=x\sin x$; d) $f(x)=x^2\cos x$;

e) $f(x)=(2^x-1)(3^x-1)$; f) $f(x)=(2\ln x+1)\log_2 x$;

g) $f(x)=(x-\sqrt{x})(x+\sqrt[3]{x})$; h) $f(x)=(3-x^2)^3$;

i) $f(x)=(x-\sqrt{x})^3$; j) $f(x)=x\ln x+\ln^2 x$;

k) $f(x)=x\sin^2 x$; l) $f(x)=(x-1)^2e^x$.

E3. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$;

d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; e) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; i) $f(x)=\dfrac{1+tgx}{\sin x}$;

j) $f(x)=\dfrac{x+1+\ln x}{x+1-\ln x}$; k) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; l) $f(x)=\dfrac{1+e^x}{2+e^x}$;

m) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$; n) $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{ctg}x}$.

E4. Pentru funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ să se rezolve ecuaţia $f'(x)=0$ precizând mulţimile D şi $D_{f'}$ în fiecare caz:

a) $f(x)=x^3-12x$; b) $f(x)=2x^3-15x^2+24x+5$;

c) $f(x)=\left(x^2+6x-15\right)e^x$; d) $f(x)=x^2\ln x$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+8}$; f) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-5x+7}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sin x+2}{\cos x}$; h) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x}}$.

S1. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$; b) $f(x)=e^{-x}\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right), n\in\mathbb{N}^*$.

S2. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x-1}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei *f*.

b) Să se determine punctele $M(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcţiei *f* în care tangenta ese paralelă cu dreapta $y=2x-1$.

c) Să se determine punctele $M(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcţiei *f* în care tangenta este perpendiculară pe dreapta $y=x$.

S3. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+1}, g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$. Să se deter- mine $a\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $e^x f'(x)+g'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

S4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+m}{x^2+x+1}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $f'(x)<0, \forall\in\mathbb{R}$.

S5. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2+mx+m)$:

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(x)\le 0$ dacă şi numai dacă $x\in[-2,2]$.

b) Pentru $m=1$ se notează $g(x)=\dfrac{e^x}{f'(x)}$. Să se calculeze:

$$S_n=g(0)+g(1)+...+g(n), n\in\mathbb{N}.$$

3.3.5 Derivarea funcţiilor inverse

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 220 manual**

Exersare

E1. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=(x^2+1)^3,\ x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x},\ x\in(-1,1)$; d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}},\ x\in(0,+\infty)$;

e) $f(x)=x\,e^{x^2},\ x\in\mathbb{R}$; f) $f(x)=\sin(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$;

g) $f(x)=\cos(x^2+x+1),\ x\in\mathbb{R}$; h) $f(x)=\sqrt{\sin x},\ x\in(0,\pi)$;

i) $f(x)=x\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$; j) $f(x)=\sqrt{x\,e^x},\ x\in(0,+\infty)$.

E2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\ln(1+\sin^2 x),\ x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=\ln(1+e^x),\ x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 x},\ x\in\mathbb{R}$; d) $f(x)=\sin(x\sqrt{x}),\ x\in(0,+\infty)$;

e) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right),\ x\in(0,2)$; f) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1}{x-1}\right),\ x\in(3,+\infty)$.

E3. Să se determine domeniul de derivabilitate pentru funcţiile $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{x-1},\ x\in[1,+\infty)$; b) $f(x)=e^{\sqrt{x}},\ x\in[0,+\infty)$;

c) $f(x)=\left|x^2-1\right|^3,\ x\in\mathbb{R}$; d) $f(x)=\ln(1+e^{|x|}),\ x\in\mathbb{R}$;

e) $f(x)=\arcsin|x|,\ x\in[-1,1)$; f) $f(x)=\arccos|x|,\ x\in[-1,1]$.

E4. Fie funcţiile $f:[0,+\infty)\to[3,+\infty),\ f(x)=x^2+3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3$.

a) Să se arate că f şi g sunt bijective. b) Să se calculeze $(f^{-1})'(4)$ şi $(g^{-1})'(8)$.

Sinteză

S1. Să se calculeze derivatele funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, specificând domeniul de derivabilitate:

a) $f(x)=\sqrt{\left|x^2-1\right|},\ x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=\sqrt{1-\ln x},\ x\in(0,e]$;

c) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$; d) $f(x)=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$;

e) $f(x)=x^{\sqrt{x}},\ x>0$; f) $f(x)=x^{\ln(x+1)},\ x>0$.

S2. Să se rezolve ecuaţia $f'(x)=0$ pentru fiecare funcţie $f:D\to\mathbb{R}$, precizând D şi $D_{f'}$:

a) $f(x)=(2x^2-6x)^3$; b) $f(x)=\cos^2 x-\cos 2x,\ x\in[0,\pi]$;

c) $f(x)=\sqrt{x^2+6x+5}$; d) $f(x)=\ln(3x^2+2x)$; e) $f(x)=3^{x^3-3x^2}$;

f) $f(x)=\operatorname{arctg}(4x^3-3x^2+1)$; g) $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{x^2}}$; h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+4}{3x+8}}$.

S3. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2^x$.

a) Să se arate că funcţia f este inversabilă. b) Să se calculeze $(f^{-1})'(3)$.

S4. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\ln(x-1)$.

a) Să se arate că funcţia f este inversabilă. b) Să se calculeze $(f^{-1})'(2)$ şi $(f^{-1})'(e+2)$.

3.4. Derivata de ordinul doi

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 224 manual

Exersare

E1. Să se stuieze dacă funcţia $f:D \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă în punctele specificate:

a) $f(x)=x^3+x,\ x_0\in\{-1,0\}$; b) $f(x)=x\,e^x,\ x_0\in\{0,1\}$

c) $f(x)=\sin x+\cos x,\ x_0\in\{0,\pi\}$; d) $f(x)=\sqrt{x}+x,\ x_0\in\{1,4\}$;

e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ x_0\in\{0,1\}$; f) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x},\ x_0\in\{0,\pi\}$;

g) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x},\ x_0\in\{0,1\}$; h) $f(x)=x^2\ln x,\ x_0\in\{1,e\}$.

E2. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă de două ori în punctul specificat:

a) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 0\\ 5x^4, & x>0\end{cases},\ x_0=0$; b) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ x^3+x, & x>0\end{cases},\ x_0=0$

c) $f(x)=x^3|x|,\ x_0=0$; d) $f(x)=\begin{cases}x^3\ln x, & x>0\\ x^3, & x\leqslant 0\end{cases},\ x_0=0$

E3. Folosind regulile de calcul cu derivate, să se calculeze derivata de ordinul doi pentru $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2x^2+5x$; b) $f(x)=x^3-4x$; c) $f(x)=e^x+x$;

d) $f(x)=x+\ln x$; e) $f(x)=x\ln x$; f) $f(x)=x^2e^x$;

g) $f(x)=x^2\ln x$; h) $f(x)=\sin^2 x$; i) $f(x)=\cos^3 x$;

j) $f(x)=x\sin x+\cos x$; k) $f(x)=x^2\sqrt{x},\ x>0$; l) $f(x)=x\,\mathrm{tg}\,x$;

m) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$; n) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Sinteză

S1. Să se arate că:

a) dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$, atunci:

$$f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f''(x)=\sin(x+\pi).$$

b) dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$, atunci:

$$f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f''(x)=\cos(x+\pi).$$

S2. Să se verifice dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}(3+4x)$ verifică egalitatea:

$$f''(x)-2f'(x)+f(x)=e^{2x}(4x+11),\ x\in\mathbb{R}$$

S3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x\sin x$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f''(x)-af'(x)+af(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$$

S4. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2x}(\sin x + \cos x)$ verifică egalitatea:

$$f''(x) + (a+b)f'(x) + (ab+2)f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

S5. Să se determine funcţia polinomială de gradul doi $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ care verifică relaţiile: $f(2) = 9$, $f'(1) = 2$ şi $f''(0) = 8$.

S6. Există o funcţie polinomială de gradul trei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$, care să verifice condiţiile $f(-1) = -6$, $f'(1) = -3$ şi $f''(2) = 4$?

S7. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă $f:D \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe D.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax, & x \leqslant 0 \\ x^3 + bx^2 + c, & x > 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + a - 1, & x \leqslant 2 \\ ax^2 + bx + c, & x > 2 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} a\sin x + b\cos x, & x \leqslant \pi \\ c\sin^2 x + x^2, & x > \pi \end{cases}$; d) $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + cx^2 + 8x + b, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$.

3.5 Regulile lui l'Hôspital

Enunţuri Exerciţii şi probleme **pag. 229 manual**

Exersare

E1. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$; c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2006}-1}{x^{2007}-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-4x+3}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x^2+\sin x}$; g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(x+1)}{x\sin x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+3\sin 8x}{\sin 7x-\sin 2x}$.

E2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2+\sin^2 x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2+x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{2e^x-2-2x-x^2}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+4x+9}{x^3+3x+16}$; b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-x+\ln x}{2x^2+x-\ln x}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(2x)}{\mathrm{ctg}(3x)}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1+\sin x)}$; f) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to \infty}x\ln\dfrac{x}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to \pi}(x-\pi)\,\mathrm{ctg}x$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln\dfrac{x}{x^2+1}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\arcsin x\ln x$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}e^{-\frac{1}{x}}\ln x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(x+2)e^{\frac{1}{x+2}}$.

pag. 230 manual

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+ax+1$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care tangenta la graficul funcţiei f în punctul $x_0=1$ trece prin punctul $M(2, 1)$.

2. Să se determine derivatele laterale ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}, & x\geqslant 0\\ \sin x, & x<0\end{cases}$ în punctul $x_0=0$.

3. Să se calculeze derivatele de ordinul doi pentru funcţia f, în cazurile:

a) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{arctg}x-\ln(x^2+1)$.

Testul 2

1. Să se determine derivabilitatea funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\sin x, & x > 0 \\ ax^2 + a^2 - 1, & x \leqslant 0 \end{cases}$ pe mulţimea $\mathbb{R}$.

2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 2}$; b) $f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 2}$.

3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \ln(x+1)}{3x + \ln(2x+1)}$.

Testul 3

1. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$.

2. Să se calculeze derivatele funcţiilor $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$; b) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.

3. Să se determine valorile parametrilor $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru c are funcţia $f:D \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe D.

a) $f(x) = \begin{cases} a^x - x - 1, & x \leqslant 0 \\ b\sin x + c, & x > 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} x^3 \ln x + a, & x > 0 \\ b\cos x + 1, & x \leqslant 0 \end{cases}$.

Capitolul 4. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor

4.1 Rolul derivatei întâi în studiul funcţiilor

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 239 manual**

Exersare

E1. Să se studieze dacă se poate aplica teorema lui Lagrange funcţiilor:

a) $f:[-3, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 3x$; b) $f:[1, e] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$;

c) $f:[1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; c) $f:[0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x|2x-1|$.

E2. Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 - 4x$; b) $f(x) = 3x - x^3$; c) $f(x) = x^4 - 8x^2$;

d) $f(x) = x\,e^x$; e) $f(x) = x\ln x$; f) $f(x) = x - \ln x$;

g) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

E3. Să se determine punctele de extrem pentru funcţia $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 - 6x$; b) $f(x) = (x-1)e^x$; c) $f(x) = \dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$;

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$; e) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$; f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

g) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$; h) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Sinteză

S1. Să se determine constantele reale pentru care se poate aplica teorema lui Lagrange funcţiei f:

a) $f:[-1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leqslant 1 \\ 5x + bx^2, & x > 1 \end{cases}$;

b) $f:[0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a + \sin x, & x \leqslant \pi \\ a\cos x + bx, & x > \pi \end{cases}$.

S2. Să se studieze monotonia funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$ şi să se determine punctele de extrem, în cazurile:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{x+1}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+4}$; c) $f(x) = x^2 \ln x$;

d) $f(x) = x\sqrt{x-1}$; e) $f(x) = x - 2\sqrt{x^2+1}$; f) $f(x) = \ln x - \dfrac{5}{2}\operatorname{arctg} x$;

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; h) $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)$;

i) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$; j) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

S3. Să se determine valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:D \to \mathbb{R}$ este monotonă pe D.

a) $f(x) = x^3 + mx$; b) $f(x) = (x^2 + m)e^{2x}$;

c) $f(x) = 2x^3 + 5mx^2 + 6x - 1$; d) $f(x) = x^2 + x - m\ln x$.

S4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x^2 + mx + 1)e^{2x}$$

are două puncte de extrem.

S5. Fie $f:\mathbb{R} \setminus \{1,\ 2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{m - x}{x^2 - 3x + 2}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f nu admite puncte de extrem.

S6. Fie $f:\mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + 2bx + 5}{x - a}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f admite puncte de extrem punctele $x = -1$ şi $x = 3$

S7. Se dă funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx^3 + nx^2 + p(x+1)$. Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1,1)$ este punct de extrem al funcţiei, iar tangenta la graficul funcţiei f în punctul $B(0, p)$ formează cu axa Ox un unghi cu măsura de 45°.

S8. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \setminus \{b\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - b}$. Să se studieze monotonia funcţiei f şi să se determine punctele de extrem, ştiind că dreptele $x = 1$ şi $y = x + 4$ sunt asimptote ale funcţiei f.

S9. Să se determine dreptunghiul de perimetru maxim înscris într-un cerc dat.

S10. Dintre toate dreptunghiurile care au aceeaşi arie, să se determine cel de perimetru minim.

S11. Un triunghi isoscel cu perimetrul $3P$ se roteşte în jurul bazei. Să se determine triunghiul care generează un corp de volum maxim.

S12. Se consideră funcţia $f:(0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$ şi intervalele:

$I_n = [n,\ n+1],\ n \in \mathbb{N}^*$

a) Să se arate că funcţiei f i se poate aplica teorema lui Lagrange pe intervalul I_n.

b) Să se aplice teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul I_n. Dacă $c_n \in I_n$ are proprietatea că $f'(c_n) = f(n+1) - f(n)$, să se determine c_n.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

d) Să se demonstreze că pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ are loc:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln n.$$

4.2. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor

Enunţuri **Exerciţii şi probleme** **pag. 246 manual**

Exersare

E1. Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate pentru funcţiile $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^2-3x$; b) $f(x)=-3x^2+6x-11$;

c) $f(x)=x^3-12x$; d) $f(x)=3x^2-2x^3$;

e) $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$; f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$;

g) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+1}$; h) $f(x)=x^2e^{-x}$;

i) $f(x)=x\ln x$; j) $f(x)=\operatorname{arctg}x+\dfrac{x^3}{3}$.

E2. Să se determine punctele de inflexiune pentru funcţiile $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-1$; b) $f(x)=x^4-4x^3$;

c) $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$;

e) $f(x)=\ln(x^2+1)$; f) $f(x)=xe^{-x^2}$;

g) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; h) $f(x)=\sin^2 x$.

E3. Să se determine intervalele de convexitate, de concavitate şi punctele de inflexiune pentru $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x\leqslant 1 \\ 2x^2-5x+3, & x>1 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1, & x\leqslant 0 \\ x+\ln(x^2+1), & x>0 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\leqslant 0 \\ x^2+x, & x>0 \end{cases}$.

Sinteză

S1. Să se determine intervalele de monotonie, convexitate şi concavitate pentru funcţiile $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^4-4x^2+1$; b) $f(x)=\dfrac{4x-x^2}{x+2}$; c) $f(x)=x-\arcsin x$;

d) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$; e) $f(x)=(x^2-x+2)e^x$; f) $f(x)=x^3\ln x$.

S2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$.

a) Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ ştiind că $x=1$ este punct de extrem, iar $x=-2$, este punct de inflexiune pentru funcţia *f*.

b) Pentru valorile lui *a, b* găsite, să se determine intervalele de monotonie, convexitate, concavitate şi punctele de extrem şi de inflexiune ale funcţiei *f*.

S3. Să se determine punctele de extrem şi de inflexiune ale funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + ax^3 + 85x - 2$, ştiind că $f''(-3) = 0$.

S4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b\operatorname{arctg} x$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$ ştiind că $f'(1) = 2$ şi $f''(-1) = 1$.

b) Pentru valorile lui a şi b găsite, determinaţi intervalele de monotonie, convexitate şi concavitate şi punctele de inflexiune ale funcţiei f.

S5. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + a^2}$, $a \in (0, +\infty)$.

a) Să se determine a ştiind că ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de inflexiune cu abscisa pozitivă este $x + 24y - 9 = 0$.

b) Pentru $a = \sqrt{3}$, să se studieze monotonia funcţiei, intervalele de convexitate-concavitate şi să se afle punctele de extrem şi de inflexiune ale funcţiei.

4.3. Reprezentarea grafică a funcţiilor

Enunţuri Exerciţii şi probleme pag. 255 manual

Exersare

E1. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-3x^2$; b) $f(x)=8-x^3$; c) $f(x)=-2x^3+3x^2$;

d) $f(x)=x^5-5x^4$; e) $f(x)=x^4-5x^2+4$; f) $f(x)=2x^3-3x^2+5$;

g) $f(x)=16-x^4$; h) $f(x)=x^4-2x^2+1$; i) $f(x)=(x-1)^2(x+1)$;

j) $f(x)=x^3(1-x)$; k) $f(x)=(1-x)^3x$; l) $f(x)=(x-1)^2(x+2)^2$.

E2. Să se reprezinte grafic funcţiile $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; b) $f(x)=\dfrac{1-x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$;

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; f) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

g) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$; h) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$.

E3. Să se reprezinte graficul funcţiei $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x\sqrt{x}$; b) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; c) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$;

d) $f(x)=xe^x$; e) $f(x)=x^2e^x$; f) $f(x)=x\ln x$;

g) $f(x)=\ln(x^2+1)$; h) $f(x)=\ln(x^2-1)$; i) $f(x)=x^2\ln x$;

j) $f(x)=2\operatorname{arctg} x$; k) $f(x)=x-\ln x$; l) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Sinteză

S1. Să se reprezinte grafic funcţia $f:D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x|x|$; b) $f(x)=x|x-1|$;

c) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ 2x^3-1, & x>1 \end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\leq 0 \\ x\ln x-1, & x>0 \end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x\leq 0 \\ 1-\sqrt{x+1}, & x>0 \end{cases}$; f) $f(x)=|x|\ln(x^2)$.

S2. Se consideră $f:\mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x-1}$, $a\in\mathbb{R}$.

Să se reprezinte graficul funcţiei f ştiind că are asimptota $y=x-1$.

S3. Să se reprezintă graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x+1}$, ştiind că are un extrem în $x=-3$.

S4. Se consideră funcţia $f:D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{ax+3}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia are o asimptotă paralelă cu a doua bisectoare.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia are un punct de extrem situat pe axa Oy.

c) Pentru $a=-4$, să se reprezinte grafic funcţia f.

S5. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x-\sin x$. Să se reprezinte grafic funcţia f''.

S6. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+b^2}$. Să se reprezinte grafic funcţia f ştiind că tangenta în origine este prima bisectoare.

S7. Se consideră $f:D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+2}{x-1}$.

a) Pentru care $a \in \mathbb{R}$, graficul funcţiei este tangent dreptei $y+2x=10$?

b) Să se traseze graficul funcţiei f pentru $a=1$.

pag. 256 manual

Teste de evaluare

Testul 1

1. Să se studieze monotonia funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+x+1}$, ştiind că $f'(1)=0$.

2. Să consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+4x+m)$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia este definită pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, punctul $A(-2,\ 0)$ este punct de extrem al graficului funcţiei f.

c) Pentru $m=9$, să se studieze monotonia funcţiei f şi să se afle punctele de extrem ale acesteia.

3. Studiaţi convexitatea şi concavitatea funcţiei

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x-\ln(x^2+1).$$

Testul 2

1. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^5$.

a) Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f'(0)=0$. Este $x=0$ un punct de extrem al funcţiei f?

2. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f.

b) Să se precizeze extremele funcţiei f.

c) Să se arate că semitangentele laterale în punctul $x=1$ sunt perpendiculare.

3. Fie $f;\mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Să se determine punctele în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu prima bisectoare.

Testul 3

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leqslant 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$.
b) Există valori ale lui a pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$?
c) Dacă $f(1) = 5$ şi $f'(3) = 4 + b$, să se traseze graficul funcţiei $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x^2 + 1)$.

2. Fie $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, +\infty)$.
b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
c) Să se arate că $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{2x}{x+2}$, $\forall x \in [0, +\infty)$.

3. Se dau funcţiile $f:D_1 \to \mathbb{R}, g:D_2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = e^x(x^2 + x - 6)$.

a) Să se afle D_1 şi D_2.
b) Să se studieze derivabilitatea funcţiilor f şi g şi să se calculeze f' şi g'.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Testul 4

1. Se consideră funcţia $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \dfrac{x^3}{3}$.

a) Să se calculeze f' şi f''.
b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
c) Să se arate că $\operatorname{arctg} x \geqslant x - \dfrac{x^3}{3}$, $x \in [0, +\infty)$.

2. Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

3. Fie $f:\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ şi $M\ (a,\ f(a)) \in \mathscr{G}_f$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 3\}$. Notăm cu N punctul în care tangenta la grafic în punctul M intersectează din nou graficul funcţiei. Să se determine valorile parametrului a pentru care coeficientul unghiular al tangentei la grafic în punctul N este egal cu 3.

pag. 258 manual

Probleme recapitulative

1. Să se determine limitele de funcţii:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{20}-2x^{10}+1}{(x-1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+...+\sin nx}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+...+\operatorname{tg} nx}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(8x)}{\sin(2x)}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x+4^x-3}{5^x+6^x-2}$.

2. Fie $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[x+\sqrt{x}+\ln^2 x\right]}{3x+1}$. Atunci:

a) $L=3$; b) $L=0$; c) $L=\ln 2$; d) $L=\dfrac{1}{3}$; e) $L=1$.

3. Să se determine a, $b\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

Facultatea de Chimie Constanţa, 1997

4. Să se determine a, b, $c\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos x+b\cos 2x+c}{x^4}=1$.

5. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}5x^2-3, & x\leqslant 1\\ a-x, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ a+\ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, & x\leqslant 1\\ 2x+a, & x\in(1,2)\\ x^3-ax+2, & x\geqslant 2\end{cases}$.

6. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}a+e^x, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{b}}{x}, & x>0\end{cases}.$$

Universitatea Piteşti, 1995

7. Să se determine parametrii reali a, b, c pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0\\ ax^2+bx+c, & x>0\end{cases}$ este continuă şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(o)}{x}\in\mathbb{R}$.

Universitatea Politehnică Bucureşti, 2004

8. Să se determine a, b, $c\in\mathbb{R}$, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}ae^{2x}, & x\leqslant 0\\ -2\sin x+b\cos 4x, & x>0\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

9. Se consideră funcţia $f;\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \max\left\{\frac{x}{x-1}, \frac{x}{x+1}\right\}$.

a) Să se explicitze $f(x)$.

b) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei *f*.

10. Fie $f{:}[-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3x + 1, & x \in [-1, 0) \\ x^2 + bx - c, & x \in [0,1] \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, pentru care funcţia este derivabilă pe $(-1, 1)$ şi $f(-1) = f(1)$.

b) Perntru valorile găsite, să se studieze derivabilitatea funcţiei

$g{:}[-1, 1] \to \mathbb{R},\ g(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

11. Se consideră $f{:}(-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$ şi

$F{:}(-1, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{c + bx + a\ln(x+1)}{x}.$$

Dacă $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 1$ şi $x^2 F'(x) = f(x),\ \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, iar $\alpha = F(2)$, atunci:

a) $\alpha = \ln\sqrt{3}$; b) $\alpha = 2$; c) $\alpha = \ln 6$; d) $\alpha = 1$; e) $\alpha = 2\ln 2$.

ASE Bucureşti, 2001

12. Fie $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{x^2 m^2 + mx + 1}, & x \leqslant 1 \\ \sqrt{x-1} + |m|\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$.

Dacă $A = \{m \in \mathbb{R} \mid f \text{ este continuă pe } \mathbb{R}\}$ şi $\alpha = \sum\limits_{m \in A} m^2$, atunci:

a) $\alpha = 1$; b) $\alpha = \frac{34}{25}$; c) $\alpha = \frac{25}{4}$; d) $\alpha = \frac{58}{9}$; e) $\alpha = \frac{81}{64}$.

13. Se consideră funcţia $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (-1)^{[x]}\left(x + a\left[\frac{x}{2}\right] + b\right) + 3$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Dacă

$A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f$ este periodică de perioadă 2 şi este continuă în $x = 1\}$, iar $S = \sum\limits_{(a,b) \in A} (a + b)$, atunci:

a) $S = 2$; b) $S = -1$; c) $S = 0$; d) $S = -3$; e) $S = 4$.

ASE Bucureşti, 2002

14. Se consideră funcţia $f{:}[0, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} px, & x \in [0, 1) \\ m, & x = 1 \\ x^3 + q, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

şi mulţimea $A = \{(p, m, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă pe } (0, 2)\}$.

Dacă $S = \sum\limits_{(p,m,q)\in A} (p+m+q)$, atunci:

a) $S = 7$; b) $S = -1$; c) $S = 0$; d) $S = 10$; e) $S = 8$.

ASE Bucureşti, 1998

15. Să se determine asimptotele funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x-2|}{x-1}$; b) $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3|x-2|}{x(x-1)}$.

16. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{6x - x^2 + 4\ln x - 2}{2x}$.

a) Să se calculeze limitele funcţiei f în punctele $x_0 = 0$ şi $x_0 = +\infty$.
b) Să se determine asimptota oblică a funcţiei f la $+\infty$.
c) Să se afle punctele în care tangenta la grafic este paralelă cu asimptota oblică a funcţiei.

Bacalaureat, 1997

17. Fie $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x - \dfrac{4\ln x}{x}$. Să se determine coordonatele punctului în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu asimptota oblică a funcţiei.

18. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + ax + b}{x+1}$.

a) Să se afle parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă a funcţiei.
b) Pentru $a = 5$, să se determine b astfel încât funcţia f să admită asimptotă verticală.

Facultatea de Ştiinţe Economice Timişoara, 1995

19. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + (m-2)x + 2 - m}$$

are domeniul de derivabilitate $\mathbb{R}$?

Universitatea Politehnică Bucureşti, 1990

20. Se consideră funcţia $f ; \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 + ax}{1 - x^2} \cdot e^{2x}, \; a \in \mathbb{R}.$$

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 f(x)$.

b) Pentru care valori ale lui a există egalitatea $3f'(0) - f(0) = 11$?

21. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+2)^{33} + (x-2)^{33}}{(x+2)^{33} - (x-2)^{33}}$ şi $T = f'(-2) + f'(0) + f'(2)$. Atunci:

a) $T = \dfrac{1}{2}$; b) $T = \dfrac{33}{2}$; c) $T = 1$; d) $T = \dfrac{3}{2}$; e) $T = \dfrac{22}{3}$.

ASE Bucureşti, 2000

22. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\leqslant 0\\ ax^2+bx+c, & x>0\end{cases}$. Să se determine valorile lui a, b, $c\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

ASE Bucureşti, 1990

23. Pentru ce valori ale parametrilor a, b, $c\in\mathbb{R}$, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+bx+c, & x\leqslant 1\\ \operatorname{arctg}(x-1), & x>1\end{cases}$$

este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

ASE Bucureşti, 1994

24. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-\pi|\sin x$.

a) Să se arate că funcţia f este derivabilă în $x=\pi$.

b) Funcţia f este de două ori derivabilă în $x=\pi$?

25. Fie $f:\mathbb{R}\to(1,+\infty)$, $f(x)=4^x+2^x+1$.

a) Să se arate că f este funcţie inversabilă.

b) Să se determine f^{-1} şi $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

Universitatea Politehnică Bucureşti, 1987

26. Fie $f;\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

a) Să se arate că există numerele a, b, $c\in\mathbb{R}$ pentru care:

$$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}.$$

b) Să se calculeze $S=f''(1)+f''(2)+...+f''(10)$.

27. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^2\operatorname{tg}x}$.

ASE Bucureşti, 1990

28. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

Universitatea Politehnică Bucureşti, 1990

29. Fie $M=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^n}\in\mathbb{R}\right\}$. Dacă $m=\sum\limits_{n\in M}n$, atunci:

a) $m=3$; b) $m=6$; c) $m=4$; d) $m=15$; e) $m=10$.

ASE Bucureşti, 2000

30. Se consideră funcţia $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}.$$

Dacă $B=\left\{x_0 \in(-1,+\infty) \mid f \text{ nu este derivabilă în } x_0\right\}$ şi $S=\sum\limits_{b\in B}\left(f_d'(b)-f_s'(b)\right)^2$, atunci:

a) $S=\frac{1}{4}$; b) $S=\frac{13}{36}$; c) $S=\frac{1}{9}$; d) $S=\frac{11}{36}$; e) $S=\frac{3}{2}$.

ASE Bucureşti, 1998

31. Se consideră funcţia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f_a(x)=\sqrt[3]{4(e^x-x-1)-x^3+(a-3)x^2},\ a\in\mathbb{R}.$$

Dacă $A=\left\{a\in\mathbb{R} \mid f_a \text{ este derivabilă în } x=0\right\}$, atunci:

a) $A\subset\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$; b) $A\subset\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$; c) $A\subset\left(\frac{5}{2},5\right)$;

d) $A\subset\left(\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$; e) $A\subset(7,15)$.

ASE Bucureşti, 2000

32. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2|x-a|-|x-b|$, $a, b\in\mathbb{R}$.

Fie $A=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă pe } \mathbb{R}\right\}$ şi $S=\sum\limits_{(a,b)\in A}(a^2+b^2)$, atunci:

a) $S=13$; b) $S=26$; c) $S=17$; d) $S=5$; e) $S=4$.

ASE Bucureşti, 2001

33. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\leqslant 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$.

Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $A=\sum\limits_{k=1}^{10} f'(k)$, atunci:

a) $A=20e$; b) $A=0$; c) $A=100e$; d) $A=11e$; e) $A=e$.

34. Să se determine numărul de elemente ale mulţimii:

$$A=\left\{a\in\mathbb{R}\ \middle|\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{2n}-2x^n-a}{(x-1)^2}=b\in\mathbb{R}\right\}.$$

35. Fie $a=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^5)-\ln^5(1+x)}{x^6}$. Atunci:

a) $a=\frac{5}{2}$; b) $a=\frac{5}{6}$; c) $a=\frac{\sqrt{e}}{2}$; d) $a=\frac{6}{5}$; e) $a=\frac{3}{2}$.

ASE Bucureşti, 2001

36. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

37. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$.

a) Să se determine $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia admite asimptota $y=x+2$.

b) Să se reprezinte graficul funcţiei *f* pentru $a=1$ şi $b=1$.

c) Pentru $a=b=1$, să se determine aria triunghiului determinat de axa *Ox* şi asimptotele funcţiei *f*.

38. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{1,\ 2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$.

a) Să se traseze graficul funcţiei *f*.

b) Să se determine în ce raport împarte dreapta $y=\dfrac{x}{2}$ aria patrulaterului determinat de axa *Ox* şi asimptotele funcţiei *f*.

39. Să se demonstreze că pentru oricare $m\in\mathbb{R}$, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x^2+mx)e^{-x}$, admite un maxim şi un minim local.

40. Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1},\ a,\ b,\ c\in(0,+\infty).$$

a) Să se determine *a, b, c* ştiind că funcţia admite o asimptotă oblică la $+\infty$ paralelă cu dreapta $y=4x+5$, iar către $-\infty$ o asimptotă orizontală $y=-1$.

b) Să se construiască graficul funcţiei pentru valorile lui *a, b, c* determinate.

41. Se dă funcţia $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+ax}{bx+2}$.

a) Să se determine $a,\ b\in\mathbb{R}$ pentru care extremele funcţiei se obţin pentru $x=-8$ şi $x=4$.

b) Pentru valorile lui *a, b* determinate, să se reprezinte graficul funcţiei *f*.

42. Fie $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{m(x+1)^3}{x^2+x+m},\ m\in\mathbb{R}^*$.

a) Pentru ce valori ale lui *m* funcţia admite două asimptote paralele cu axa *Oy*?

b) Pentru ce valori ale lui *m* funcţia este monotonă pe $\mathbb{R}$?

c) Pentru $m=1$, să se reprezinte graficul funcţiei *f*.

d) Fie *A, B* punctele în care graficul funcţiei *f*, pentru $m=1$, intersectează axele de coordonate. În ce puncte graficul funcţiei admite tangente paralele cu dreapta *AB*?

REZOLVĂRI

Partea a II-a. Elemente de analiză matematică

Capitolul I. Limite de funcții
1.1. Mulțimi de puncte pe dreapta reală

Exersare

E1. *Soluție:*
Mulțimile de minoranți și majoranți sunt respectiv:
a) $m = (-\infty, -3]$, $M = [5, +\infty)$,
b) $m = (-\infty, -2]$, $M = [3, +\infty)$,
c) $m = (-\infty, -5]$, $M = [4, +\infty)$,
d) $m = (-\infty, -2]$, $M = [5, +\infty)$,
e) $m = (-\infty, 1]$, $M = [11, +\infty)$,
f) $m = (-\infty, -1]$, $M = [3, +\infty)$.

E2. *Soluție:*
Mai întâi se rezolvă ecuațiile și inecuațiile de gradul 2, cu radicali, cu modul, exponențiale și logaritmice.
a) $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 3\}$.
Așadar $A = \{0, 3\}$ și avem: $m = (-\infty, 0]$, $M = [3, +\infty)$.

b) Alcătuim tabelul de semn pentru $f(x) = x^2 - 3x$.

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
$x^2 - 3x$	+ + + + + + 0 – – – – – 0 + + + + + +

Se obține $x \in [0, 3]$, deci $A = [0, 3]$.
Rezultă $m = (-\infty, 0]$ și $M = [3, +\infty)$.

c) Condiții impuse: $x - 3 \geqslant 0$, deci domeniul de lucru este $D = [3, +\infty)$.
Prin ridicare la pătrat obținem succesiv
$$\sqrt{x-3} \leqslant 2 \Rightarrow x - 3 \leqslant 4 \Rightarrow x \leqslant 7 \Rightarrow x \in (-\infty, 7].$$
Așadar $A = (-\infty, 7) \cap D = [3, 7]$ și se obține: $m = (-\infty, 3]$, $M = [7, +\infty)$.

d) Folosim proprietatea modulului: $|E(x)| \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant E(x) \leqslant M$.
Se obține succesiv:
$$|x-3| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x - 3 \leqslant 1 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 4.$$
Rezultă că x $[2, 4]$, $A = [2, 4]$, iar $m = (-\infty, 2]$, $M = [4, +\infty)$.

e) Avem succesiv
$$2^{x-3} \leqslant 0{,}25 \Leftrightarrow 2^{x-3} \leqslant \frac{25}{100} \Leftrightarrow 2^{x-3} \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x-3} \leqslant 2^{-2} \Leftrightarrow x - 3 \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant 1.$$
Așadar $x \in (-\infty, 1]$ iar $A = (0, +\infty) \cap (-\infty, 1] = (0, 1]$.
Rezultă că: $m = (-\infty, 0]$, $M = [1, +\infty)$.

f) Deoarece $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$, iar $0{,}25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$ se obține:
$$2^{-3} \leqslant 4^x \leqslant 2^{-2} \Leftrightarrow 2^{-3} \leqslant 2^{2x} \leqslant 2^{-2} \Leftrightarrow -3 \leqslant 2x \leqslant -2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant -1.$$
Așadar $A = \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$, $m = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$, $M = [-1, +\infty)$.

g) Condiții: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D = (1, +\infty)$.
Folosim proprietatea $\log_a E(x) \leqslant b$, $a > 1 \Rightarrow E(x) \leqslant a^b$.
Se obține succesiv:

$$\log_2(x-1) \leqslant 2 \Rightarrow x - 1 \leqslant 2^2 \Rightarrow x \leqslant 5.$$

Aşadar $A = (-\infty, 5) \cap D = (1, 5)$, iar $m = (-\infty, 1]$, $M = [5, +\infty)$.

h) Condiții de existență pentru logaritmi: $\begin{cases} x-1>0 \\ 3x>0 \end{cases}$

Se obține domeniul de existență: $D = (1, +\infty) \cap (-\infty, 3) = (1, 3)$.

Folosim formula de schimbare a bazei pentru logaritmi $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$.

Se obține succesiv:

$$\log_2(x-1) \leqslant \log_4(3-x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \leqslant \frac{\log_2(3-x)}{\log_2 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) \leqslant \frac{1}{2}\log_2(3-x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \leqslant \log_2\sqrt{3-x}$$

Din monotonia logaritmilor rezultă că $x - 1 \leqslant \sqrt{3-x}$.
Cum $x - 1 > 0$, prin ridicare la pătrat avem $(x-1)^2 \leqslant 3 - x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leqslant 3 - x \Rightarrow x^2 - x - 2 \leqslant 0$.
Tabelul de semn pentru $f(x) = x^2 - x - 2$ este:

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
$x^2 - x - 2$	+ + + + + 0 – – – – – 0 + + + + +

Soluția inecuației este $x \in [-1, 2]$.
Rezultă $A = [-1, 2] \cap (1, 3) = (1, 2]$, iar $m = (-\infty, 1]$, $M = [2, +\infty)$.

E3. *Soluție:*
a) Avem că $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $A = [-1, 1]$, care este interval mărginit.

b) Avem: $\dfrac{2n}{n+1} = \dfrac{2n+2-2}{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} = 2 - \dfrac{2}{n+1} < 2$, deci $M = 2$ este un majorant pentru mulțimea A. Deoarece $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{2n}{n+1} \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ deci $m = 0$ este un minorant pentru A. Aşadar A este mulțime mărginită.

c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Aşadar $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1$, deci $A \subset (0, 1)$.

d) Deoarece $\dfrac{48}{n+1} \in \mathbb{N}$, rezultă că $n + 1$ este divizor pozitiv pentru 48.
Dar $D_{48} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm16, \pm24, \pm48\}$.
Rezultă că $n + 1 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ şi astfel
$n \in \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 23, 47\}$.
Aşadar $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 23, 47\} \subset [0, 47]$.

e) Deoarece $x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{2}{x^2+1} \leqslant 2$, deci $A \subset [0, 2]$.

f) Fie $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\in A$. Rezultă, după aducerea la acelaşi numitor: $yx^2+(y-1)x+y-1=0$.
Ecuația are soluție dacă $\Delta \geqslant 0$. Se obține $\Delta=(y-1)^2-4y(y-1)=(y-1)(-3y-1)$.
Soluțiile inecuației $\Delta \geqslant 0$ sunt $y\in\left[-\frac{1}{3},1\right]$. Aşadar $A=\left[-\frac{1}{3},1\right]$.

E4. *Soluție:*

a) Avem: $|x|\leqslant 3 \Leftrightarrow -3\leqslant x\leqslant 3$. Aşadar $x\in[-3,3]=A$.

b) Avem: $|x-1|\leqslant 2 \Leftrightarrow -2\leqslant x-1\leqslant 2 \Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 3$. Aşadar x $\in[-1,3]=A$.

c) Avem: $|x-2|=\begin{cases}x-2, \text{ dacă } x-2\geqslant 0\\ -x+2, \text{ dacă } x-2<0\end{cases}$. Rezultă că $|x-2|=\begin{cases}x-2, \text{ dacă } x\geqslant 2\\ -x+2, \text{ dacă } x<2\end{cases}$.

• Pentru x $\geqslant$ 2, inecuația $|x-2|\geqslant 1$ se scrie x – 2 $\geqslant$ 1 cu soluția x $\geqslant$ 3, deci x $\in[3,+\infty)$.

• Pentru $x<2$, inecuația $|x-2|\geqslant 1$ se scrie $-x+2\geqslant 1$ şi are soluția $x\leqslant 1$, deci $x\in(-\infty,1]$.

Rezultă că $|x-2|\geqslant 1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)=A$.

d) Avem succesiv: $\dfrac{1}{x}\leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-1\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}\leqslant 0$.

Alcătuim tabelul de semn pentru $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$.

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$1-x$	+ + + + + 0 + + + + + 0 – – – – – –
x	– – – – – 0 + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	– – – – – | + + + + + 0 – – – – –

Se obține că $x\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)=A$.

e) Tabelul de semn pentru $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ este

x	$-\infty$ –2 1 2 $+\infty$
$x-1$	– – – – – – – – – – – – – 0 + + + + + + + + + + +
x^2-4	+ + + + + + 0 – – – – – – – – – – – 0 + + + + + + +
$f(x)$	– – – – – | + + + + + + 0 – – – | + + + + + + +

Se obține: $x\in(-2,1]\cup(2,+\infty)=A$.

f) Avem că: $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{x^2-9}-1\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{x^2-9}\leqslant 0 \Leftrightarrow x^2-9<0$.

Se obține că $x\in(-3,3)=A$.

g) Deoarece $0{,}25=2^{-2}$ obținem că:

$$2^{x+1}\leqslant 2^{4x}\cdot 2^{-2(x+1)} \Leftrightarrow 2^{x+1}\leqslant {}^{24x-2x-2} \Leftrightarrow 2^{x+1}\leqslant 2^{2x-2} \Leftrightarrow x+1\leqslant 2x-2 \Leftrightarrow 3\leqslant x.$$

Aşadar, $x\in[3,+\infty)=A$.

h) Condițiile de existență pentru radical: $x-3\geqslant 0$.
Deoarece $\sqrt{x-3}\geqslant 0 \Rightarrow$ că $x-3\geqslant\sqrt{x-3}\geqslant 0$ deci domeniul de existență este $x\in[3,+\infty)$.
Prin ridicare la pătrat se obține:

$$(x-3)\leqslant(x-3)^2 \text{ sau } x^2-7x+12\geqslant 0, \text{ cu soluția } x\in(-\infty,3]\cup[4,+\infty).$$

Aşadar, $A=\{(-\infty,3]\cup[4,+\infty))\cap[3,+\infty)=[4,+\infty)\cup\{3\}$.

E5. *Soluție:*

Vecinătăți pentru $x_0 = 0$ sunt: V_1, V_4, V_8, iar vecinătăți pentru $x = -1$ sunt: V_1, V_8, V_9.

b) V_2 nu este vecinătate pentru x_0 şi x_1 deoarece nu conține aceste puncte.

c) $0 \not\subset V_2$, $-1 \not\subset V_2$.

d) $-1 \not\subset V_4$,

e) $-1 \not\subset \mathbb{N}$, iar 0 nu aparține unui interval inclus în $\mathbb{N}$.

e), f) $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ nu conține intervale deschise care să conțină pe 0 şi –1.

i) $0 \not\subset V_9$.

E6. *Soluție:*

O mulțime $V \subset \mathbb{R}$ este vecinătate pentru $+\infty$, dacă există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $V = (a, +\infty)$.
Vecinătăți ale lui $+\infty$ sunt. V_1, V_2, V_3, V_9.

E7. Soluție:

a) $A' = [0, 3]$,

b) $A' = \varnothing$, deoarece A este mulțime finită;

c) $A' = (-\infty, 3] \cup \{-\infty\} = [-\infty, 3]$,

d) $A' = [-2, 2] \cup [3, 5]$,

e) $A' = \{+\infty\}$,

f) $A' = [1, 2]$.

Numărul $x = 5$ este punct izolat al mulțimii A.

E8. *Soluție:*

a), b) Mulțimea A este interval nemărginit.

c) Mulțimea A este nemărginită şi superior şi inferior deoarece conține toate numerele pare pozitive şi numerele impare negative.

d) $A = (1, +\infty)$. Într-adevăr dacă $y \in A$, atunci rezultă că există $x \in (0, 1)$ cu $y = \frac{1}{x}$.

Dar, atunci $x = \frac{1}{y} < (0, 1)$ $0 < \frac{1}{y} < 1$.

Rezultă că $y > 0$ şi $\frac{1}{y} < 1$. Cum y este pozitiv, rezultă că din $\frac{1}{y} < 1$ se obține $y > 1$.

Aşadar $y \in (1, +\infty) = A$.

e) Inecuația $|x-1| \geqslant 2$ conduce la $x - 1 \geqslant 2$ sau $-x + 1 \geqslant 2$, deci $x \in [3, +\infty)$ au $x \in (-\infty, -1]$.

Aşadar $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty) = A$.

f) Fie $y \in A$. Atunci există $x \in (2, +\infty)$ cu $y = \frac{x-1}{x-2}$. Se obține că $x = \frac{2y-1}{y-1}$ iar din condiția $x > 2$ rezultă că $\frac{2y-1}{y-1} > 2$, inecuație cu soluția $y \in (1, +\infty)$. Aşadar $A = (1, +\infty)$.

Observație.

Deoarece $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$ şi $x - 2 > 0$ rezultă că $\frac{x-1}{x-2} > 1, \forall x \in (2, +\infty)$ etc.

g) $A = \{0, 7, 14, ...\} = \{7n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dacă $M \in \mathbb{R}$ ar fi un majorant pentru A, atunci $7n \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sau $n \leqslant \frac{M}{7}, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce ar însemna că mulțimea $\mathbb{N}$ ar fi mărginită superior de $\frac{M}{7}$, absurd. Aşadar A este nemărginită superior.

1.4. Calculul limitelor de funcții

Exersare

E1. *Soluție:*

a) 3; b) 125; c) $\sqrt[3]{3}$; d) $\ell = 2 \cdot 2 + 1 = 5$;

e) $\ell = -\frac{\pi}{\pi} + 1 = 0$, f) $\ell = 3 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 4$; g) $\ell = 5^3 + 1 = 126$, h) $\ell = \ln 3$.

E2. *Soluție:*

a) $\ell = (1 + 1)^2 + 1 = 5$, b) $\ell = \infty + \infty^2 = +\infty$, c) $\ell = (-\infty)^2 - 3 = +\infty$,
d) $\ell = 3 \cdot \infty + 1 + \infty^2 = +\infty$, e) $\ell = -7 \cdot \infty^2 = -\infty$, f) $\ell = \sqrt{9} = 3$,
g) $\ell = \log_3(0_+) = -\infty$, h) $\ell = \log_{0,3}(0_+) = +\infty$.

E3. *Soluție:*

Aplicăm proprietăți ale logaritmilor.

a) $\ell = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$; b) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 + 1) = 1$; c) $\ell = \lim\limits_{x\to 5}(x \log_5 2) = 5\log_5 2$.

d) $\ell = \lim\limits_{x\to -\infty} x \cdot \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -\infty \cdot (-1) = +\infty$.

E4. *Soluție:*

Funcția f are limită în $x_0 \in D'$ dacă limitele laterale $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$ există și sunt egale.
a) $f(1 - 0) = 2 \cdot 1^2 + 3 = 5$, $f(1 + 0) = 5 \cdot 1 - 1 = 4$, $f(2 - 0) = f(2 + 0) = 5 \cdot 2 - 1 = 9$.
Funcția f nu are limită în $x_0 = 1$, iar în $x_0 = 2$ limita este $l = 9$.

b) Avem: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+3) = 3$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(4^x) = +\infty$.

De asemenea, $f(1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x+3) = 4$, $f(1+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 4^x = 4$.

Așadar f are limită în $x_0 \in \{0, 1, +\infty\}$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

a) Avem: $6 = a - 1 + 3 \Rightarrow a = 4$;

b) $5 + 6a \cdot 3 = 23 \Rightarrow a = 1$;

c) $a^2 + 2a - 3 = 5 \Rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow a \in \{2, -4\}$;

d) $\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9$;

e) $a^2 + 3a + 11 = a + 14 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a \in \{-3, 1]$;

f) $\sqrt[3]{a+1} = 3 \Rightarrow a + 1 = 27 \Rightarrow a = 26$;

g) $\sqrt{a-1} = a - 1$. Condiția de existență $a - 1 \geqslant 0$ deci $a \geqslant 1$.
Se obține $a - 1 = (a - 1)^2$ cu soluția $a \in \{1, 2\}$;

h) $2^{a^2} = 16 \Rightarrow 2^{a^2} = 2^4 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a \in \{-2, 2\}$.

S2. *Soluție:*

a) Pe mulțimea $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ funcția *f* are limite.

Studiem existența limitei funcției *f* în $x_0 = \frac{1}{2}$.

Rezultă că: $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \log_2 x = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$, iar $f\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x - 2) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = -1$.

Așadar *f* are limită și în $x_0 = \frac{1}{2}$.

b) Pentru $x_0 \in (0, 1) \cup (1, 2)$ *f* are limită.

Avem: $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$, $f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1} \log_2 x = \log_2 1 = 0$.

Așadar *f* nu are limită în $x_0 = 1$.

Punctul $x_0 = 3$ este punct izolat pentru domeniul de definiție și în el nu se pune problema existenței limitei.

S3. *Soluție:*

a) Avem: $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1} [ax^2 + (a+2)x] = a + a + 2 = 2a + 2$ și $f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x} = 1$.

Din egalitatea $f(1 - 0) = f(1 + 0)$ se obține că $2a + 2 = 1$ deci $a = -\frac{1}{2}$.

b) Avem: $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1} [(x+a)^2 + (x-1)^2] = (a+1)^2$ și $f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1 + a)(x + 4 - a) = a \cdot (5 - a)$.

Din egalitatea $f(1 - 0) = f(1 + 0)$ se obține ecuația $(a + 1)^2 = a(5 - a)$ sau $2a^2 - 3a + 1 = 0$ cu soluția $a \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

c) Avem: $f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2} (ax + b) = 2a + b$,

$f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2} \log_2 x = 1$,

$f(4-0) = \lim\limits_{x \to 4} \log_2 x = \log_2 4 = 2$,

$f(4+0) = \lim\limits_{x \to 4} (ax^2 + bx + 6) = 16a + 4b + 6$.

Din egalitățile $f(2 - 0) = f(2 + 0)$ și $f(4 - 0) = f(4 + 0)$ rezultă sistemul de ecuații

$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 16a + 4b + 6 = 2 \end{cases}$ cu soluția $a = -1$, $b = 3$;

d) Avem: $f(1 - 0) = 2^a$, $f(1 + 0) = 4^b$, $f(3 - 0) = 4^{3b}$, $f(3 + 0) = 8^{3(a+2)}$.

Rezultă sistemul de ecuații: $\begin{cases} 2^a = 4^b \\ 4^{3b} = 8^{3(a+2)} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a = 2b \\ 6b = 9(a+2) \end{cases}$ cu soluția $a = -3$, $b = -\frac{3}{2}$.

S4. *Soluție:*

a) $f(-1-0) = |-1| = 1$, $f(-1+0) = |-1|$, $f(0-0) = 0 = f(0+0)$, $f(1-0) = |1| = 1 = f(1+0)$.

Așadar *f* are limite în $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$;

b) $f(0 - 0) = 3 = f(0 + 0)$, $f(3 - 0) = 0 = f(3 + 0)$, $f(4 - 0) = 1 = f(4 + 0)$;

d) $f(-5 - 0) = 8 - 5 = 3 = f(-5 + 0)$, $f(3 - 0) = 3 = f(3 + 0)$, $f(5 - 0) = 7 = f(5 + 0)$;

e) Avem: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} |x^2 - 1| = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} |x^2 - 1| = 0$,

$f(2-0) = \lim\limits_{x \to 2} |x^2 - 1| = 3$, $\quad f(2+0) = \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2} + 1 = 3$.

1.4.3. Limitele funcțiilor trigonometrice

Exersare

E1. *Soluție:*
Se obține:

a) $\ell = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, b) $\ell = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\ell = \sin - \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $\ell = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
e) $\ell = \sin\pi = 0$, f) $\ell = \cos\pi = -1$, g) $\ell = \sin 2\pi = 0$, h) $\ell = \cos(-\pi) = \cos\pi = -1$.

E2. *Soluție:*

a) $\ell = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, b) $\ell = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, c) $\ell = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = -1$;

d) $\ell = -\infty$; e) $\ell = \mathrm{tg}\pi = 0$, f) $\ell = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$;

g) $\ell = \mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$; h) $\ell = \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$; i) $\ell = -\infty$; j) $\ell = +\infty$.

E3. *Soluție:*

a) $\ell = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$;

b) $\ell = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

c) $\ell = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

d) $\ell = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

e) $\ell = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$;

f) $\ell = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

E4. *Soluție:*

a) $\ell = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$;

b) $\ell = \mathrm{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$;

c) $\ell = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;

d) $\ell = \mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \mathrm{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

e) $\ell = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$;

f) $\ell = \mathrm{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Sinteză

S1. *Soluți:.*

a) Se obține egalitatea $\arcsin a = \frac{\pi}{2}$ şi rezultă că $a = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

b) $\arccos a = 0 \Rightarrow a = \cos 0 = 1$; c) $\mathrm{arctg}\, a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

d) $\arcsin a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\arccos a = \pi \Rightarrow a = \cos\pi = -1$;

f) $\mathrm{arctg}\, a = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

S2. *Soluție:*

a) $f(0-0) = \sin 0 = 0$, $f(0+0) = 0^2 = 0$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$ nu există

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$,

- $f(\pi-0) = \lim\limits_{x\to\pi} \sin x = \sin\pi = 0$

  $f(\pi+0) = \lim\limits_{x\to\pi} 3(x-\pi)^2 = 0$, deci $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to 2\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to 2\pi} 3(x-\pi)^2 = 3\pi^2$

c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1+0) = \arccos(-1) = \pi$;

- $f(0-0) = \lim\limits_{x\to\infty} \arccos x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$,

  $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$;

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}\right) = 3 + \frac{\pi}{2}$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$;

- $f(0-0) = \operatorname{arctg}0 = 0$,

  $f(0+0) = \arcsin 0 = 0$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;

- $f(1-0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$,

  $f(1+0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$.

S3. *Soluție:*

a) Funcția are limite pentru $x_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
Punem condiția să existe limite în $x_0 \in \{0, 1\}$.
Avem: • $f(0-0) = \sin 0 = 0$, $f(0+0) = b$, deci $b = 0$;

• $f(1-0) = a + b$, $f(1+0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, deci $a + b = \frac{\pi}{4}$ şi se obține $a = \frac{\pi}{4}$.

b) Funcția are limită pentru $x_0 \in [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$.
Punem condiția să existe limite şi în $x_0 \in \{-1, 1\}$.
Avem:

- $f(-1-0) = a$,

  $f(-1+0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, deci $a = -\frac{\pi}{2}$;

- $f(1-0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$,

  $f(1+0) = b$, deci $b = \frac{\pi}{2}$.

S4. *Soluție:*

a) Avem, după explicitarea modulului: $f(x)=\begin{cases}-\sin x,\ x\leqslant 0\\ \sin x,\ x>0\end{cases}$.

Se obține:

- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(-\sin x)=-\sin(-1)=\sin 1$;
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sin x=\sin 1$;
- $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0}(-\sin x)=0$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$, deci $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

b) $f(x)=\begin{cases}-\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]\\ \sin x,\ x\in(0,\ \pi]\end{cases}$.

Rezultă că:

- $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$;
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1$;
- $f(0-0)=-\sin 0=0$, $f(0+0)=\sin 0=0$, deci $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

c)
- $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=\left|\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|=0$,
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\cos\frac{\pi}{2}=0$,
- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\cos 0=1$.

d) Avem: $f(x)=\begin{cases}-\operatorname{arctg} x,\ x\leqslant 0\\ \operatorname{arctg} x,\ x>0\end{cases}$.

Se obține:

- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{4}$,
- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\operatorname{arctg} 0=0$,
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$.

1.5. Operații cu limite de funcții

Exersare

E1. *Soluție:*

a) $\ell = \lim_{x\to 4} x^2 - \lim_{x\to 4} 3x + \lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 4^2 - 3\cdot 4 + \sqrt{4} = 6$;

b) $\ell = 2\cdot 3 - 1 + \ln\frac{3}{3} = 5$;

c) $\ell = -3$;

d) $\ell = 2 + 3 - 4 = 1$;

e) $\ell = 2$;

f) $\ell = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{6}$.

E2. *Soluție:*

a) $\ell = \lim_{x\to 1}(x^2 - 2)\cdot \lim_{x\to 1}(x^2 - 3) = (-1)\cdot(-2) = 2$;

b) $\ell = \left(\lim_{x\to 1} x^2\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1}\log_3 x\right) = 1\cdot \log_3 1 = 0$;

c) $\ell = 0$;

d) $\ell = \left(\lim_{x\to 3}\frac{2^x}{8}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 3}\frac{3^x}{27}\right) = \frac{8}{8}\cdot\frac{27}{27} = 1$;

e) $\ell = 0$;

f) $\ell = 0$.

E3. *Soluție:*

a) $\ell = \dfrac{\lim_{x\to 1}(x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1)} = \frac{0}{3} = 0$;

b) $\ell = \dfrac{\lim_{x\to 2}(x^2 + 4x - 10)}{\lim_{x\to 2}(2x - 3)} = \frac{2}{1} = 2$;

c) $\ell = 1$; d) $\ell = \frac{2}{3}$; e) $\ell = 0$; f) $\ell = \frac{2}{5}$.

E4. *Soluție:*

a) $\ell = \left(\lim_{x\to 1}(x+1)\right)^{\lim_{x\to 1}\sqrt{x}} = 2^{\sqrt{1}} = 2$;

b) $\ell = \left(\lim_{x\to 0}\sin x\right)^{\lim_{x\to 0}(1+x)} = 0^1 = 0$;

c) $\ell = 5^3 = 125$; d) $\ell = 1$; e) $\ell = 0$; f) $\ell = \frac{\pi}{4}$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

a) $\ell = \left(\lim_{x\to 1}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\right)^2 = \left(\lim_{x\to 1}\sqrt{x} + \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}\right)^2 = (1+1)^2 = 4$; b) $\ell = 0$; c) $\ell = 1$;

d) $\ell = 0$; e) $\ell = 4$; f) $\ell = 0$; g) $\ell = \left(2\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$; h) $\ell = 2$; i) $\ell = \frac{\pi}{2}$.

S2. *Soluție:*

Folosim operațiile cu limite de funcții. Se obține:

a) $\dfrac{a\pi+\dfrac{\pi}{2}}{\pi+0}=2\Rightarrow a+\dfrac{1}{2}=2\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$;

b) $\dfrac{9}{a-1}=1\Rightarrow a-1=9\Rightarrow a=10$;

c) $\dfrac{\sqrt{a}+2a}{2+\sqrt{a}}=1\Rightarrow 2a+\sqrt{a}=\sqrt{a}+2\Rightarrow a=1$;

d) $\dfrac{2^a+4^a}{2\cdot 2^a+3\cdot 4^a}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow 8\cdot 2^2+8\cdot 4^{\,a}=6\cdot 2^a+9\cdot 4^a\Rightarrow 2\cdot 2^a=4^a\Rightarrow 2^{a+1}=2^{2a}\Rightarrow$
$\Rightarrow a+1=2a\Rightarrow a=1$.

S3. *Soluție:*

a) • $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \mathrm{tg}x)=0$;

• $f\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} x\cdot tgx=\dfrac{\pi}{2}(+\infty)=+\infty$, iar $f\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)=1$.

Aşadar f nu are limită în $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

b) • $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}(1-\sqrt[3]{x})=1$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\sqrt{x}=0$, deci f nu are limită în $x_0 = 0$.

• $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sqrt{x}=0$,

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1}(1-\sqrt[3]{x})=0$, deci $\ell=0$.

c) • $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{x^2+x+1}\right)^3=-1$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}(-1+\sin x)^3=-1$, deci $\ell=-1$.

S4. *Soluție:*

a) $\ell=\left(\lim\limits_{x\to 1}\sin x\right)\left(\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x-1}\right)=(\sin 1)\cdot\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}=(\sin 1)\cdot 0=0$;

b) $\ell=\left(\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)\right)^2=(0+0)^2=0$;

c) $\ell=3\cdot\log 10=3$;

d) $\ell=\left(\sqrt[3]{7+1}\right)^3=8$;

e) $\ell=\dfrac{e^0}{1+2^0}=\dfrac{1}{2}$;

f) $\ell=\dfrac{\sqrt{4}+\sqrt[3]{8}}{\sqrt{16}-\sqrt[3]{8}}=2$;

g) $\ell=\dfrac{\arcsin 0}{1+\sin\dfrac{\pi}{2}}=0$;

h) $\ell=\log_2(2+\log_3 9)=\log_2 4=2$.

S5. *Soluție:*

a) Din definiția părții întregi se obține că: $\frac{1}{x^2-1}<\left[\frac{1}{x^2}\right]\leqslant\frac{1}{x^2}$.

Rezultă că: $x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)<x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]\leqslant 1$ sau $1-x^2<f(x)\leqslant 1$.

Aşadar, cu criteriul cleştelui se obține $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)\leqslant\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]\leqslant 1$, deci $\ell=1$.

b) Avem: $x-1<[x]\leqslant x$ şi astfel $\frac{x-1}{x}<\frac{[x]}{x}\leqslant 1,\ \forall x>0$.

Rezultă că:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\leqslant\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}\leqslant 1\text{, deci } l=1.$$

c) Deoarece $-1\leqslant\sin x\leqslant 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ se va obține inegalitatea:

$$-\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{\sin x}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}\quad\text{şi}\quad\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0.$$

d) Deoarece $-1\leqslant\cos x\leqslant 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $-1+x\leqslant\cos x+x\leqslant 1+x$.

Se obține inegalitatea $\frac{x-1}{x^2}\leqslant\frac{\cos x+x}{x^2}\leqslant\frac{1+x}{x^2}$ sau $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{\cos x+x}{x^2}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

Rezultă că $\ell=0$.

e) Se obține că $\left|\frac{x\cos x}{x^2+1}\right|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\cdot|\cos x|\leqslant\frac{|x|}{x^2+1}$ şi cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x|}{x^2+1}=0$ rezultă că limita cerută este $\ell=0$.

f) Deoarece:

$x-1<[x]\leqslant x$ şi $3x-1<[3x]\leqslant 3x$ se obține că $4x-2<[x]+[3x]\leqslant 4x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Aşadar, pentru $x>0$ avem inegalitatea $4-\frac{2}{x}<\frac{[x]+[3x]}{x}\leqslant 4$, din $\ell=4$.

1.6. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții

Exersare

E1. *Soluție:*

a) $\ell = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$; b) $\ell = \frac{0+0+1}{3\cdot 0+1} = 1$; c) $\ell = \frac{2\cdot 4}{6+4+1} = \frac{8}{11}$; d) $\ell = \frac{-3+2}{4-3} = -1$.

E2. *Soluție:*

a) $\ell = \frac{2}{0_+} = +\infty$; b) $\ell = \frac{-1}{2\cdot 0_+} = -\infty$; c) $\ell = \frac{4}{0_-} = -\infty$; d) $\ell = \frac{8}{0_+} = +\infty$;

e) $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2x^2+3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(0_-)\cdot(-1)} = \frac{1}{0_+} = +\infty$; f) $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{5x^2-19}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{0_+\cdot 1} = +\infty$.

E3. *Soluție:*

a) $\ell = \frac{1}{0_+} = +\infty$; b) $\ell = \frac{2}{0_+} = +\infty$; c) $\ell = \frac{2}{0_+} = +\infty$;

d) $\ell = \lim\limits_{x\to 3} \frac{6x}{-(x-3)^2} = \frac{18}{0_-} = -\infty$; e) $\ell = \frac{11}{0_+} = +\infty$; f) $\ell = \frac{-1}{0_+} = -\infty$.

E4. *Soluție:*

Cazuri de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Se aduc expresiile date la forme mai simple.

a) $\frac{4x-4}{9x^2-9} = \frac{4(x-1)}{9(x^2-1)} = \frac{4(x-1)}{9(x-1)(x+1)} = \frac{4}{9(x+1)}$, $\ell = \frac{2}{9}$;

b) $\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$, $\ell = -2$;

c) $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-1}$, $\ell = 4$;

d) $\frac{x^2-3x}{x^2-7x+12} = \frac{x(x-3)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x}{x-4}$, $\ell = -3$;

e) $\frac{(x-2)^2}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x}$, $\ell = 0$;

f) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2+4x} = \frac{(x+2)^2}{2x(x+2)} = \frac{x+2}{2x}$, $\ell = 0$.

E5. *Soluție:*

Caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$. Fiind limite de funcții raționale se compară gradele numitorului și numărătorului.

a) $\ell = \frac{2}{-1} = -2$; b) $\ell = \frac{-1}{2}$; c) $\ell = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$; d) $\ell = \frac{-1}{3}$;

e) $\ell = \frac{3}{2}\cdot(+\infty) = +\infty$; f) $\ell = \frac{6}{2}\cdot(-\infty) = -\infty$; g) $\ell = 0$; h) $\ell = 0$.

E6. *Soluție:*

Cazuri de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$. Se folosește metoda factorului comun forțat.

a) $\ell = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x\left(\frac{3}{x}+1\right)}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{3}{x}+1}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{1+0}}{\sqrt{0+1}} = 2$;

b) $\ell = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{|x|\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = \dfrac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{4+0}} = \dfrac{1}{2}$;

c) Avem: $\dfrac{x+\sqrt{x}}{3x+2\sqrt{x}+1} = \dfrac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\cdot\left(3+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{3+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}$, $\ell = \dfrac{1}{3}$;

d) $\dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{2x+3} = \dfrac{x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)}{x\cdot\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1}{2+\frac{3}{x}}$, $\ell = \dfrac{1}{2}$;

e) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{2\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2x}{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+x} = \dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}$, $\ell = \dfrac{3}{2}$;

f) $\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}{3\sqrt{x-1}+\sqrt{4x+1}} = \dfrac{1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{3\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$, $\ell = \dfrac{1+2}{3+\sqrt{4}} = \dfrac{3}{5}$;

g) $\dfrac{3x-1}{\sqrt{9x^2-x+7}} = \dfrac{x\cdot\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(9-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}} = \dfrac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}$, pentru $x<0$, $\ell=-1$;

h) $\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+5}}{3x-4} = \dfrac{|x|\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x\left(3-\frac{4}{x}\right)} = \dfrac{-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}{3-\frac{4}{x}}$, pentru $x<0$, $\ell = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

Se aduc funcțiile raționale la forma cea mai simplă.

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1+x^2-2x+14}{x^2-1} = \dfrac{2x^2-2}{x^2-1} = 2$. Limita este $\ell = 2$.

b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3-8-(x-1)^2\,|x-1|}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{(x-1)(x^2+2x+1-2x-2+4)-(x-1)^2\,|x-1|}{(x-1)(x-2)} =$

$= \dfrac{x^2+3}{x-2} - \dfrac{(x-1)\,|x-1|}{x-2}$; $\ell = \dfrac{4}{-1} = -4$;

c) $f(x) = \dfrac{5x^2-6x-8}{2x^2-6x+4} = \dfrac{(x-2)(5x+4)}{2(x-1)(x-2)} = \dfrac{5x+4}{2(x-1)}$; $\ell = 7$;

d) $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-3+x+3)}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\cdot 2x}=\dfrac{x+3}{2x}$, $\ell=1$;

e) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{(2x-1)(x-1)}=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-1)}=\dfrac{x-1}{2x-1}$, $\ell=0$;

f) $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{3x^2-6x-9}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{3(x+1)(x-3)}=\dfrac{2(x-1)}{3(x-3)}$, $\ell=\dfrac{1}{3}$.

S2. *Soluție:*

a) $f(2-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1}{a}=-\infty$;

$f(2+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{-x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{-x^2}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{-4}{0_+\cdot 4}=-\infty$.

Aşadar $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$.

b) $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x-1}{(x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{3}$,

$f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2-4x+3}{9(x-1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{(x-1)(x-3)}{9(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{9}=-\dfrac{2}{9}$.

Aşadar f nu are limită în $x_0 = 1$.

S3. *Soluție:*

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{2x+a}{x-1}=\dfrac{2+a}{0_-}=\begin{cases}\pm\infty, \text{ dacă } a+2\neq 0\\ \dfrac{0}{0}, \text{ dacă } a+2=0\end{cases}$.

Aşadar limita poate fi finită numai în cazul $a = -2$.

Pentru $a = -2$ obținem: $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\dfrac{3x+ax^2}{x-3}=\dfrac{9+9a}{0_-}$. Limita poate fi finită dacă $9 + 9a = 0$, deci $a = -1$. Obținem:

$$\ell=\lim_{x\to 3}\frac{3x-x^2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x(3-x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(-x)=-3.$$

c) Se obține: $\ell=\dfrac{(1-a)^2-4}{0_\pm}$, deci este necesar ca $(1-a)^2 = 4$, deci $a\in\{-1, 3\}$.

• Pentru $a = -1$ se obține: $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^2-4}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x+1}=2$.

• Pentru $a = 3$ se obține: $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-3)^2-4}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x+1}=-2$.

d) Se aduce f la forma: $f(x)=\dfrac{x^2+3x-a^2x}{x^2-1}$.

Se pune condiția ca $1^2 + 3\cdot 1 - a^2 = 0$, deci $a^2 = 4$ şi $a\in\{-2, 2\}$.

Avem: $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4x}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{x+1}$ şi $\ell=\dfrac{1}{2}$.

S4. *Soluție:*

Cazuri de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Este necesar să se aducă funcțiile raționale la forme mai simple.

a) $f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x-3)}+\frac{(x-1)(6x+5)}{(x-1)(4x+1)}=\frac{x+1}{2x-3}+\frac{6x+5}{4x+1}$; $\ell=\frac{1}{5}$;

b) $f(x)=\frac{x-2}{(x-2)(5x+6)}-\frac{(x-2)(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{1}{5x+6}-\frac{x-2}{x+4}$; $\ell=\frac{1}{16}$;

c) $f(x)=\frac{2x^2+2x}{(x+1)(x+2)}+\frac{x^2+x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{2x}{x+2}+\frac{x}{2x+1}$, $\ell=-1$.

S5. *Soluție:*

a) $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+4x+1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0\cdot 1=0$;

b) $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{2x^2+6x+1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}=\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{1}=2$;

c) $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x}{x(x+1)}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{3}{1}\cdot 1=3$;

d) $l=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4x}{x(x+1)}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=3\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-3\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-3$.

1.6.4. Limite fundamentale în calculul limitelor de funcții

Exersare

E1. *Soluție:*

a) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$;

b) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(6x)}{6x}\cdot\frac{6}{x+1}\right)=1\cdot 6=6$;

c) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$;

d) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{2}$;

e) $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{1}\right)=1\cdot 2=2$;

f) $\ell=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{4}$;

g) $\ell=\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{\sin(1-x^2)}{1-x^2}\cdot\frac{1-x}{2}\right)=\frac{2}{2}=1$;

h) $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin(3x-3)}{3(x-1)}\cdot\frac{x^2-1}{\sin(x^2-1)}\cdot\frac{3}{x+1}\right)=1\cdot 1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

E2. *Soluție:*

a) $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$;

b) $l=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{tg(x-1)\pi}{(x-1)\pi}\cdot\frac{\pi}{x+1}\right)=\frac{\pi}{2}$;

c) $l=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{tg(3x-9)}{3(x-3)}\cdot\frac{3}{x+3}\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;

d) $l=\lim\limits_{x\to \pi}\left(\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\cdot\frac{x-\pi}{tg(x-\pi)}\right)=1$;

e) $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{tg(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-x}{\sin(x^2-x)}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-x}\right)=1\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x}=2$;

f) $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{tg(x-1)^2}{(x-1)^2}\cdot\frac{x^2-1}{\sin(x^2-1)}\cdot\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}$.

E3. *Soluție:*

a) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin(3x)}{3x}\cdot\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$;

b) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin(x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1}=1$;

c) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin(10x)}{10x}\cdot\frac{5x}{\arcsin(5x)}\cdot\frac{10}{5}\right)=2$;

d) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin(5x)}{5x}\cdot\frac{10x}{\sin(10x)}\cdot\frac{5}{10}\right)=\frac{1}{2}$;

e) $\ell=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{x-\frac{\pi}{4}}{16x^2-\pi^2}\right)=1\cdot\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\frac{4x-\pi}{4}}{(4x-\pi)(4x+\pi)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(4x+\pi)}=\frac{1}{8\pi}$;

E4. *Soluție:*

a) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$;

b) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+6x)}{6x}\cdot\frac{6}{8}\right)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$;

c) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}\cdot\frac{5}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{1+x}=5$;

d) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{8x}{\ln(1+8x)}\cdot\frac{6}{8}\right)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$;

e) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$;

f) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{3x^2}{\ln(1+3x^2)}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

E5. *Soluție:*

a) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{6}\right) = (\ln 3)\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{\ln 3}{6}$;

b) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^{x^2}-1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+x}\right) = (\ln 3)\cdot\dfrac{1}{1} = \ln 3$;

c) $\ell = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8(8^{x-1}-1)}{x-1} = 8\cdot\ln 8$;

d) $\ell = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x+1}-2^3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(2^3\cdot\dfrac{2^{x-2}-1}{x-2}\right) = 2^3\cdot\ln 2$;

e) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1+1-3^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x-1}{x}-\dfrac{3^x-1}{x}\right) = \ln 2-\ln 3 = \ln\dfrac{2}{3}$;

f) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1+1-2^x}{2^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{3^x-1}{x}-\dfrac{2^x-1}{x}}{\dfrac{2^x-1}{x}} = \dfrac{\ln 3-\ln 2}{\ln 2}\right)$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

a) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\sin 9x}{3x}\right) = \dfrac{1}{3}+\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 9x}{9x}\cdot 3\right) = \dfrac{1}{3}+3 = \dfrac{10}{3}$;

b) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x(x+1)}+\dfrac{3\sin 5x}{x(x+1)}+\dfrac{x}{x(x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{2}{x+1}\right)+\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\dfrac{15}{x+1}\right)+$

$+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1} = 2+15+1 = 18$;

c) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1$;

d) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{2}\right) = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;

e) $\ell = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3}\cdot\dfrac{3x^2-4x+1}{\sin(3x^2-4x+1)}\cdot\dfrac{x^2-4x+3}{3x^2-4x+1}\right) = 1\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{3x^2-4x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1(3x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{3x-1} = -1$;

f) $\ell = \lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{\operatorname{tg}(x^2+x-2)}{x^2+x-2}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{\operatorname{tg}(x^2+5x+6)}\cdot\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}\right) = 1\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} =$

$= \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-1}{x+3} = -3$;

g) $\ell = \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{\arcsin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+x}{\arcsin(x^2+x)}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x\cdot(x+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x} = 2$;

h) $\ell = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-6x+5)}{\arcsin(x^2+4x-5)} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-6x+5)}{x^2-6x+5}\cdot\dfrac{x^2+4x-5}{\arcsin(x^2+4x-5)}\cdot\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+4x-5}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+4x-5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+5)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

S2. *Soluție:*

a) Folosim formula trigonometrică: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Rezultă că $\ell = \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2$;

b) Folosim formula trigonometrică:

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}.$$

Se obține: $\ell = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\cdot\sin x}{\sin 5x\cdot\sin 3x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 5x} = -2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5}$;

c) $\ell = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot 3x - 5\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot x}{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot 4x - 2\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) - 5\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{4\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right) - 6\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)} = \frac{3-5}{4-6} = 1$;

d) $\ell = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}(\arcsin x)}{\arcsin x}\cdot\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin(\operatorname{arctg} x)}\cdot\frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}\right) = 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x} =$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\right) = 1\cdot 1 = 1$.

S3. *Soluție:*

a) $\ell = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{\sin 9x}\right) = 1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\sin 5x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{3}{5}\right) = 1\cdot 1\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$;

b) $\ell = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+1-3^x)}{1-3^x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1-3^x}{x}\right) = 1\cdot 1\cdot(-\ln 3) = -\ln 3$;

c) $\ell = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x\sin x)}{x\cdot\sin x}\cdot\frac{x\cdot\sin 5x}{\ln(1+x\sin 5x)}\cdot\frac{\sin x}{\sin 5x}\right) = 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 5x} =$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{1}{5}\right) = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$;

d) $\ell = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\ln(x+1))}{\ln(x+1)}\cdot\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(1+\ln(x^2+1))}\cdot\frac{x\ln(x+1)}{\ln(x^2+1)}\right) = 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\ln(x+1)}{\ln(x^2+1)} =$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}\right) = 1\cdot 1 = 1$.

S4. *Soluție:*

$\ell = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{\cos ax} - \sin ax}{\frac{\sin bx}{\cos bx} - \sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)\left(\frac{1-\cos ax}{\cos ax}\right)}{(\sin bx)\left(\frac{1-\cos bx}{\cos bx}\right)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{\cos bx}{\cos ax}\cdot\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}\cdot\frac{a}{b}\right) =$

$= 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx} = \frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}} = \frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\cdot\frac{\frac{bx}{2}}{\sin\frac{bx}{2}}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$.

Dar $\ell = \frac{1}{8}$ și se obține că $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, deci $b = 2a$.

Avem: $E = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-4a^2}{a^2+4a^2} = \frac{-3}{5}$.

S5. *Soluție:*

$$\ell_n=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{\sin x+2\sin 2x+...+n\sin nx}{x}\right)=1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{2\sin 2x}{x}+...+n\frac{\sin nx}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+4\cdot\frac{\sin 2x}{2x}+...+n^2\frac{\sin nx}{nx}\right)=1+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=14.$$

Se obține $\ell_1=1$, $\ell_2=1+2^2=5$, $\ell_3=1+4+9=14$, deci $n=3$.

S6. *Soluție:*

a) $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+a-bx(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-b)x^2+(b+3)x+a}{x-1}$.

Pentru ca limita să fie finită trebuie ca numărătorul să aibă gradul cel mult egal cu gradul numitorului. Se impune condiția $2-b=0$, deci $b=2$. Atunci:

$$\ell=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+a}{x-1}=5.$$

Aşadar $\ell=a$ şi $\ell=5$.

a) Avem: $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-ax(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(1-2a)x+1}{x+2}$.

Limita este finită dacă numărătorul are cel mult gradul 1.

Se impune condiția $1-a=0$, deci $a=1$. Rezultă că:

$\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x+2}=-1$, dar $l=3+b$ şi se obține că $-1=3+b$ deci $b=-4$;

c) $\ell=-b+\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-ax)=-b+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-a^2x^2}{\sqrt{x^2+x}+ax}=-b+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+ax}$.

Limita poate fi finită dacă $1-a^2=0$, deci $a=1$ sau $a=-1$.

• Pentru $a=-1\Rightarrow\ell=-b+\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=+\infty$.

• Pentru $a=1\Rightarrow\ell=-b+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}-b$. Se obține că $\frac{1}{2}-b=\frac{3}{2}$ deci $b=-1$.

Aşadar $a=1$, $b=-1$.

d) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\right)=1\cdot 1\cdot\frac{a}{6}=\frac{a}{6}$. Rezultă că $\frac{a}{6}=2$ şi $a=12$.

e) $\ell_1=a\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(1+3-x)}{x-3}=-a$, iar

$$\ell_2=\lim_{x\to 3}\frac{8(2^{x-3}-1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{2^{x-3}-1}{x-3}\cdot\frac{8}{x+3}\right)=(\ln 2)\cdot\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\ln 2.$$

Rezultă $a=-\frac{4\ln 2}{3}$;

f) $\ell_1=\lim\limits_{x\to 2}\frac{16(2^{x-2}-1)}{16(4^{x-2}-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2^{x-2}-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{4^{x-2}-1}\right)=\frac{\ln 2}{\ln 4}=\frac{\ln 2}{2\ln 2}=\frac{1}{2}$, iar

$$\ell_2=\lim_{x\to 1}\sqrt{x-a^2}=\sqrt{1-a^2}.$$

Din egalitatea $\frac{1}{2}=\sqrt{1-a^2}$ se obține $a^2=\frac{3}{4}$, deci $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.7. Asimptotele funcțiilor reale

Exersare

E1. *Soluție:*

a) $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Aşadar $\pm\infty$ sunt puncte de acumulare pentru D. Rezultă că:

$$\bullet\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ şi } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Aşadar dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$, şi la $+\infty$.

b) $D=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$. Se obține:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-3}=0 \text{ şi } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=0,$$

deci dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.

c) $D=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$. Se obține: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{4-x}=-1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4-x}=-1$.

Dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.

d) $D=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Se obține: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{3}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Dreapta $y=\frac{3}{2}$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.

e) $D=\mathbb{R}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Asimptota orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$ este dreapta $y=0$;

f) $D=\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup\left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$. Asimptota orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$ este $y=\frac{2}{3}$.

g) $D=[0,+\infty)$. În acest caz numai $+\infty$ este punct de acumulare pentru D.
Se obține $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ şi asimptota orizontală la $+\infty$, dreapta $y=0$.

h) $D=\mathbb{R}$, $y=\frac{3}{2}$ la $\pm\infty$.

i) $D=\mathbb{R}$. Se obține: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x|x|}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}=1,$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2+x+1}=-1.$$

Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$, iar $y=-1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$

E2. *Soluție:*

a) $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Avem: $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0_-}=-\infty$, $f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0_+}=+\infty$.

Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală bilaterală.

Dacă $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x_0-1}\in\mathbb{R}$, deci nu mai există alte asimptote verticale.

b) $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Rezultă $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{0_+}=+\infty$.

Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală bilaterală;

c) $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Se obține:

• $f(-1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{-2\cdot 0_-}=-\infty$ şi $f(-1+0)=\frac{-1}{-2\cdot 0_+}=+\infty$.

Dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală bilaterală.

• $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{0_-\cdot 2}=-\infty$, $f(1+0)=+\infty$, deci dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală bilaterală.

d) $D=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

• $f(-2-0)=+\infty$, $f(-2+0)=-\infty$;

• $f(2-0)=-\infty$, $f(2+0)=+\infty$.

Dreptele $x = 2$, $x = -2$ sunt asimptote verticale bilaterale.

e) $D=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$. Asimptote verticale $x = 1$ şi $x = 2$;

f) $D=(-1,+\infty)$. Avem: $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\ln(x+1)=-\infty$.

Dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală la dreapta;

g) $D=(-1,+\infty)$, $x = -1$;

h) $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $x = 0$.

E3. *Soluție:*

a) $D=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. Punctele $\pm\infty$ sunt puncte de acumulare pentru D.

• Asimptotă oblică spre $-\infty$.

Avem: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=1$;

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-2}=2.$$

Dreapa $y = x + 2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

• Asimptotă oblică spre $+\infty$

Avem: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=1$ şi

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2.$$

Dreapta $y = x + 2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Se obține: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x}{x(x-1)}=2$,

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-1}=3.$$

Analog se obține că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-2x)=3$ şi astfel dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$;

c) $D=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

Se obține că $y = -x + 2$, este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$;

d) $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

• Asimptota oblică la $+\infty$.

Avem: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2|x|}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{x(x-1)}=1$,

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x-1}=3.$$

Dreapta $y=x+3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

• Asimptotă oblică spre $-\infty$.

Avem: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x}{x(x-1)}=1$ şi

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x-1}=-1.$$

Dreapta $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

e) $D=[0,+\infty)$. Problema determinării asimptotei oblice se pune numai la $+\infty$.
Se obține:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1,$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+\sqrt{x}}=-\infty.$$

Rezultă că nu există asimptotă oblică.

f) $D=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Avem: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x(2x-1)}\right)=\dfrac{1}{2}$,

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2x}{2x-1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{2(2x-1)}=\frac{5}{4}.$$

Dreapta $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{4}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

Analog: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x}{x(2x-1)}=\dfrac{1}{2}$,

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x}{2x-1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{2(2x-1)}=\frac{-3}{4}.$$

Dreapta $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

a) $D=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$

Avem: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.

• $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{x}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{1}{0_-\cdot(-2)}=+\infty$

$f(1+0)=\dfrac{1}{0_-}=-\infty$,

$$f(3-0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{x}{(x-1)(x-3)}=\frac{3}{2\cdot 0_-}=-\infty,$$

$f(3+0)=+\infty$.

Rezultă că dreptele $x=1$, $x=3$ sunt asimptote verticale bilaterale.

b) $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

• Asimptote orizontale.

Se obține:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2-1}=-1$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1$, deci $y=-1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$, iar $y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

• Asimptote verticale

Se obține: $f(-1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}}\frac{x|x|}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{-2\cdot 0_+}=+\infty,$

$$f(-1-0)=-\infty,$$

$$f(1-0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x|x|}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{0_-\cdot 2}=-\infty,$$

$$f(1+0)=+\infty.$$

Aşadar dreptele $x=1$, $x=-1$ sunt asimptote verticale bilaterale.

Nu există asimptote oblice, deoarece la ambele ramuri există asimptote orizontale;

c) $D=(-\infty,1)\cup(1,5)\cup(5,+\infty)$. Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$, iar dreptele $x=1$, $x=5$ sunt asimptote verticale bilaterale.

d) Se pune condiția $\frac{1+x}{x-1}\geqslant 0$, $x-1\neq 0$. Se obține $D=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$.

• Asimptote orizontale.

Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt{1}=1$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Rezultă că $y=1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.

• Asimptote verticale

Avem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt{\frac{2}{0_+}}=+\infty$, deci $x-1$ este asimptotă verticală.

e) $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Avem, după explicitarea modulului:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2-1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\[2mm] \dfrac{x^2}{1-x^2}, & x\in(-1,1)\end{cases}$$

• Asimptote orizontale.

Se obține:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1 \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1$$

deci $y=1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.

• Asimptote verticale

Avem: $f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{|x^2-1|}=\dfrac{1}{0_+}=+\infty$, $f(-1+0)=+\infty$, $f(1+0)=+\infty$, $f(1-0)=+\infty$.

Dreptele $x=1$ şi $x=-1$ sunt asimptote verticale bilaterale.

f) $D=(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ nu există asimptote orizontale la $-\infty$ şi la $+\infty$.

• Asimptote verticale

Avem: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2}{|x-1|}=\dfrac{1}{0_+}=+\infty$.

Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală bilaterală.

• Asimptote oblice

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\cdot|x-1|}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{|x-1|}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

Aşadar $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

• $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x|x-1|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-x}=-1$,

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{(x-1)}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x}=-1.$$

Dreapta $y=-x-1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

g) $D=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Asimptote orizontale

Avem: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+x}\right)=1$, deci $y=1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.

• Asimptote verticale

Avem:

$$f(1+0)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2}{x^2-x}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0_+}=+\infty,$$

$$f(1-0)=-\infty,\ f(-1+0)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x^2}{x^2+x}=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{0_+}=-\infty, f(-1-0)=+\infty.$$

Aşadar $x=-1$, $x=1$ sunt asimptote verticale bilaterale.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{x^2}{x^2+x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{x}{x+1}=0$, $f(0+0)=0$, dreapta $x=0$ nu este asimptotă verticală;

h) $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

• Nu există asimptote orizontale.

• Asimptote verticale sunt dreptele $x=-1$ şi $x=1$.

• Asimptote oblice.

Se obține: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=1$,

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Analog se obține că $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$, deci $y=x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$.

S2. *Soluție:*

a) $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

• Asimptote orizontale

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\cdot 2^{\frac{1}{x}}=\infty\cdot 2^0=\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\cdot 2^{\frac{1}{x}}=-\infty\cdot 2^0=-\infty.$$

Aşadar nu există asimptote orizontale.

• Asimptote verticale

$$f(0-0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}x\cdot 2^{\frac{1}{x}}=0\cdot 2^{\frac{1}{0_-}}=0\cdot 2^{-\infty}=0,\text{ iar}$$

$$f(0+0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\cdot 2^{\frac{1}{x}}=0\cdot 2^{\frac{1}{0_+}}=0\cdot 2^{+\infty}=0$$

caz de excepție.

Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\cdot 2^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{2^y}{y}=+\infty$.

Rezultă că $x=0$ este asimptotă verticală lateral dreapta.

• Asiptote oblice

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot 2^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=2^0=1,$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(x2^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\ln 2.$$

Analog, $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2^{\frac{1}{x}}=1$ şi $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot 2^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\ln 2$.

Rezultă că dreapta $y=x+\ln 2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$.

b) Se pune condiția $e+\frac{1}{x}>0$. Se obține $\frac{xe+1}{x}>0$ cu soluția: $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)\cup(0,+\infty)=D$.

• Asimptote orizontale.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\infty\cdot\ln e=\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=-\infty\cdot\ln e=-\infty.$$

Nu există asimptote orizontale.

• Asimptote verticale $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{\ln(e+y)}{y}=0$,

$$f\left(-\frac{1}{e}-0\right)=\lim_{\substack{x\to -\frac{1}{e}\\ x<-\frac{1}{e}}} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to -e}\frac{\ln(e+y)}{y}=\frac{-\infty}{-e}=+\infty .$$

Dreapta $x=-\frac{1}{e}$ este asimptotă verticală.

• Asimptote oblice

• $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\ln e=1$,

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-x\right)=\lim_{y\to 0}\frac{ln(e+y)-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e+y}{e}\right)}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{y}{e}\right)}{\frac{y}{e}\cdot e}=\frac{1}{e}$$

Dreapta $y=x+\frac{1}{e}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

• $m=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\ln e=1$,

$n=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(e+y)-1}{y}=\frac{1}{e}$.

Dreapta $y=x+\frac{1}{e}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

c) Se impune condiția: $1+\frac{1}{x}>0$. Rezultă că $x\in(-\infty, -1)\ \ (0, +\infty)=D$.

• Asimptote orizontale

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\ln(1+y)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}(1-y)\right)=1\cdot 1\cdot 1$$

$$\lim_{x\to -\infty}(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\left(\frac{1}{y}-1\right)\ln(1+y)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot(1-y)\right)=1.$$

Rezultă că $y = 1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.

• Asimptote verticale

• $f(-1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=-2\ln 0_{+}=-2(-\infty)=+\infty$,

• $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=-1\ln\infty=-\infty$.

Dreptele $x=-1$, $x=0$ sunt asimptote verticale.

d) Condiții de existență: $\frac{x^3+1}{x-1}\geqslant 0$, $x-1\neq 0$.

Se obține $x\in(-\infty, -1]\cup(1, +\infty)$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ nu există asimptote orizontale.

• Asimptote verticale

$f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x-1}}=\sqrt{\dfrac{2}{0_+}}=+\infty$, deci dreapta $x=1$ este asimptotă verticală.

• Asimptote oblice

• $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x^2(x-1)}}=1$,

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x-1}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{\sqrt{x^2\left(\frac{x+\frac{1}{x^2}}{x-1}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x+\frac{1}{x^2}}{x-1}}+1}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Dreapta $y=x+\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

• $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x^2(x-1)}}=-1$,

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}+x\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1-y^3}{-y-1}}-y\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\sqrt{\frac{y^3-1}{y+1}}-y\right)=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{y^3-1}{y+1}-y^2}{\sqrt{\frac{y^3-1}{y+1}}+y}=\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{-y^2-1}{y+1}}{\sqrt{\frac{y^3-1}{y+1}}+y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{-y^2-1}{y(y+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{y+\frac{1}{y^2}}{y+1}}+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Dreapta $y=-x-\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

S3. *Soluție:*

Pentru numitor avem $\Delta=a^2-4a-4$.

Deosebim următoarele cazuri:

• $\Delta<0$. Atunci domeniul de definiție pentru funcția f este $D=\mathbb{R}$ şi nu există asimptote verticale.

• $\Delta=0$. Atunci $x^2-ax+a+1=(x-x_0)^2$ şi dreapta $x=x_0$ este asimptotă verticală.
Se obține: $a\in\{2-2\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2}\}$.

• $\Delta>0$. Atunci $x^2-ax+a+1=(x-x_1)(x-x_2)$ şi $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$.

Dreptele $x=x_1$ şi $x=x_2$ sunt posibile asimptote.
Pentru a rămâne doar o asimptotă, fracția $f(x)$ trebuie să se simplifice fie cu $x-1$, fie cu $x+1$.
Dacă $x-x_1=x-1$ atunci $x_1=1$ şi $1^2-a+a+1=2\neq 0$.

Dacă $x - x_1 = x + 1$ atunci $x_1 = -1$ şi $(-1)^2 + a + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$, iar $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x} = \frac{x-1}{x}$, cu singura asimptotă verticală $x = 0$.

În concluzie există o singură asimptotă verticală dacă $a \in \{2-2\sqrt{2}, -1, 2+2\sqrt{2}\}$.

S4. *Soluție:*

a) Avem: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+2a+bx}{x(x-1)} = a$.

Din egalitatea $a = a^2$ se obține $a \in \{0, 1\}$.

Pentru $a = 0$, $f(x) = \frac{bx}{x-1}$, $y = 2$. Atunci este necesar ca $2 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Pentru $a = 1$, $f(x) = \frac{x^2+bx+2}{x-1}$, $y = x+2$.

Se pune condiția $2 = n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+bx+2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(b+1)x+2}{x-1} = b+1$.

Aşadar $b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1$.

b) Avem $m = 1$. Rezultă că

$$-a+3 = n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+a)(x+a+1)}{(x+a+2)} - a\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(a-1)x+a^2+a}{x+a+2} = a-1.$$

Aşadar $-a + 3 = a - 1 \Rightarrow a = 2$.

Teste de evaluare

Testul 1

Soluții

1. $\ell_1=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x+3}=0$, $\ell_2=1$, $\ell_1+\ell_2=1$. Răspuns: a).

2. a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-5x+4)}{\sin(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\sin(x^2-5x+4)}{x^2-5x+4}\cdot\dfrac{x-1}{\sin(x-1)}\cdot\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}\right)=$

$$=1\cdot1\cdot\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-4)=-3;$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$.

3. $b=m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+ax+3}{x^2}=1$,

$$2=n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax+3}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+3}{x}=a.$$

Aşadar $a=2$, $b=1$, $a+b=3$. Răspuns corect a).

Testul 2

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arcsin x}{\sin x\cdot\operatorname{arctg}x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{\arcsin x}{x}\cdot\dfrac{x}{\operatorname{arctg}x}\right)=1\cdot1\cdot1=1$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}}{3x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{1}{x}}=-\dfrac{1}{3}$.

2. $\ell_1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-1+1-a^x}{x}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3^x-1}{3}-\dfrac{a^x-1}{x}\right)=\ln3-\ln a=\ln\dfrac{3}{a}$.

Aşadar $\ln\dfrac{3}{a}=1\Rightarrow\dfrac{3}{a}=e$ deci $a=\dfrac{3}{e}$. Răspuns corect c).

3. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+1}{x^2+2bx+1}=a$, rezultă că dreapta $y=a$ este asimptotă orizontală.
Este necesar ca f să nu mai admită alte asimptote.
Pentru a nu exista asimptote verticale se pune condiția ca ecuația $x^2+2bx+1=0$ să nu aibă soluții reale.
Se obține $\Delta=4b^2-4<0$, deci $b\in(-1, 1)$.
Răspuns corect c).

Testul 3

Soluții

1. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+2}{x+2}=\dfrac{8}{4}=2$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-3^x)^2}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x-3^x}{x}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x-1}{x}-\dfrac{3^x-1}{x}\right)^2=(\ln 2-\ln 3)^2$.

2. $4=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x+a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{1}=$

$=2a\cdot 2\sqrt{a}=4a\sqrt{a}$. Rezultă că $a\sqrt{a}=1$ şi $a=1$.

3. Avem:

$a=m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}=1$, iar

$1=n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$,

ceea ce nu se poate.

$a=m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}=-1$, deci $a=-1$, iar $a+1=n=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$.

Aşadar $a=-1$ are proprietatea cerută.

4. Pentru $x\to -x$ se obține egalitate $2f(-x)+3f(x)=x^2-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Formăm sistemul $\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=x^2-1\\ 3f(x)+2f(-x)=x^2-1\end{cases}$.

Prin scădere se obține că $f(-x)=f(x)$ deci f este funcție pară.

Aşadar, din prima ecuație se obține: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{5}$.

Avem că $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\dfrac{x_0^2-1}{5}$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$.

Testul 4

Soluții

1. Funcția f are limită pentru $\forall x\in(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$.

Avem:

$$f(a-0)=\lim_{x\to a}(x^3+a^3)=2a^3,$$
$$f(a+0)=\lim_{x\to a}(x+1)=a+1.$$

Funcția are limită în a dacă $f(a-0)=f(a+0)$, deci $2a^3=a+1$.

Avem succesiv:

$2a^3-a-1=0\Rightarrow a^3-a+a^3-1=0\Rightarrow a(a-1)(a+1)+(a-1)(a^2+a+1)=0\Rightarrow$
$(a-1)(a^2+a+a^2+a+1)=0$ de unde $a=1$ şi $2a^2+2a+1=0$, fără soluții reale.

2. Calculăm limitele laterale în $x_0 = 1$.

Rezultă că $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+3)=a+4$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+b}{x^2+2}=\dfrac{b+3}{3}$.

Aşadar $a+4=\dfrac{b}{3}+1$ deci $b = 3a + 9$.

Avem că:

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2+ax+3-a-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}(x+a+1)=$$

$$=a+2\text{, iar }\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{\frac{3x+b}{x^2+2}-\frac{b+3}{3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-(b+3)x^2+9x+b-6}{3(x-1)(x^2+2)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)[-(b+3)(x+1)+9]}{3(x-1)(x^2+2)}=\lim_{x\to1}\frac{-(b+3)(x+1)+9}{3(x^2+2)}=\frac{9-2(b+3)}{9}=\frac{3-2b}{9}.$$

Din egalităţile $\begin{cases}a+2=\dfrac{3-2b}{9}\\ b=3a+9\end{cases}$ se obţine că $a=-\dfrac{11}{5}$, $b=\dfrac{12}{5}$.

3. Se obţine:

$$2=m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+\sqrt{bx^2+cx-1}}{x}=a+\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{bx^2+cx-1}{x^2}}=a+\sqrt{b}.$$

$$-1=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(ax+\sqrt{bx^2+cx-1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{bx^2+cx-1-a^2x^2}{\sqrt{bx^2+cx-1}-ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(b-a^2)x^2+cx-1}{\sqrt{bx^2+cx-1}-ax}.$$

Se impune condiţia $b-a^2=0$, pentru ca limita să fie finită. Rezultă că:

$$-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{cx-1}{\sqrt{bx^2+cx-1}-ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(c-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{b+\frac{c}{x}-\frac{1}{x^2}}-ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{c-\frac{1}{x}}{\sqrt{b+\frac{c}{x}-\frac{1}{x^2}}-a}=\frac{c}{-a-\sqrt{b}}.$$

Aşadar se obţine sistemul de condiţii $\begin{cases}a+\sqrt{b}=2\\ a=b^2\\ \dfrac{c}{a+\sqrt{b}}=1\end{cases}$, cu soluţia $c = 2$, $b = 1$, $a = 1$.

Capitolul II. Funcții continue
1.1. Mulțimi de puncte pe dreapta reală

Exersare

E1. *Soluție:*

a) Folosind operațiile cu limite de funcții se obține:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(x^2 - 7x) = \lim_{x\to x_0} x^2 - \lim_{x\to x_0} 7x = x_0^2 - 7x_0,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $f(x_0) = x_0^2 - 7x_0$ rezultă că funcția f este continuă pentru $\forall x_0 \in \{-1, 0, 1\}$.

b) Fie $x_0 \in \{-1, 0, 2\}$. Rezultă că:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(x + 2|x|) = \lim_{x\to x_0} x + 2\lim_{x\to x_0}|x| = x_0 + 2|x_0| = f(x_0),$$

deci f este funcție continuă în $x_0 \in \{-1, 0, 2\}$.

c) Pentru $x_0 \in \{-2, 1\}$ se obține că $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2}{x+1} = \frac{x_0^2}{x_0+1} = f(x_0)$, deci f este continuă în x_0;

E2. *Soluții:*

a) Avem: $f(1-0) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1$, $f(1+0) = \lim_{x\to 1}(2x-1) = 1$, $f(1) = 1$, deci funcția este continuă în $x_0 = 1$;

b) Se obține: $f(0-0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $f(0+0) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$, $f(0) = 1$, deci f este continuă în $x_0 = 0$.

c) Se obține: $f(0-0) = \lim_{x\to 0}(3x+1) = 1$, $f(0+0) = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$, $f(0) = 1$, deci f este continuă în $x_0 = 0$.

• $f(1-0) = \lim_{x\to 1}\frac{\arcsin x}{x} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $f(1+0) = \lim_{x\to 1}\ln x = 0$, $f(1) = 0$, deci f este discontinuă în $x_0 = 1$.

d) Punctul $x_0 = -1$ este punct izolat al domeniului de definiție, deci funcția f este continuă în $x_0 = -1$.
Avem:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1}(3+x) = 4,\ f(1+0) = \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2x-1} = 4,\ f(1) = 4,$$

deci funcția f este continuă în $x_0 = 1$.

E3. *Soluție:*

a) Funcția este continuă pe $x_0 \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
Studiem continuitatea în $x_0 = 1$. Se obține:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1}(x^2 - x + 2) = 2,\ f(1+0) = \lim_{x\to 1}(2x-1) = 1,\ f(1) = 2.$$

Limitele laterale există, sunt finite, deci punctul de discontinuitate $x_0 = 1$ este de prima speță.
b) Studiem continuitatea în $x_0 = 0$. Se obține:

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0}(2^x - 2) = -1,\ f(0+0) = \lim_{x\to 0}(2^x - 3^x) = 0.$$

Rezultă că $x_0 = 0$ este punct de discontinuitate de prima speță.

c) Se obține: $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0_-}=-\infty$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$, deci $x_0=1$ este punct de discontinuitate de speța a doua (limitele laterale există şi una este infinită).

d) Avem: $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$, $f(0-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$, f(0) = 2. Punctul $x_0=0$ este punct de discontinuitate de speța a doua (deoarece limitele laterale sunt infinite).

E4. *Soluție:*

În acest cazuri vom studia continuitatea funcțiilor numai în punctele de legătură, în rest fiind sigur funcții continue.

a) Avem: $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1}(x+a)=1+a$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$, $f(1)=1+a$.

Dacă $a+1=3$, deci $a=2$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar pentru $a\neq 2$, domeniul de continuitate este $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) $f(0-0)=1+2^a$, $f(0+0)=3$, $f(0)=1+2^a$. Dacă $1+2^a=3$, deci $a=1$ funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

c) Avem: $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}$;

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x+2a)}{2x}=2a,\ f(0)=2a^2$.

Funcția f este continuă în $x_0=0$, dacă şi numai dacă $\frac{a}{2}=2a=2a^2$, deci dacă $a=0$.

- Pentru $a=0$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
- Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d) Studiem continuitatea în $x_0=0$ şi $x_0=1$.

Avem:

- $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}(2ax+1)=1,\ f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}(x+a)=a,\ f(0)=1$
- $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1}(x+a)=1+a,\ f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1}(3x+b)=3+b,\ f(1)=b+3$.

- Pentru $a=1$ şi $1+a=3+b$, deci $a=1$, $b=-1$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
- Pentru $a=1$ şi $b\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ funcția este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
- Pentru $a\neq 1$ şi $a\neq b+2$, funcția este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

Studiem continuitatea funcțiilor în punctele de legătură în celelalte puncte din domeniu de definiție, acestea fiind continue.

a) $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax+x^2)}{ax+x^2}\cdot\frac{a+x}{1}\right)=a$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+e^3)=\ln e^3=3,\ f(0)=3$.

- Pentru $a=3$, domeniul de continuitate este $\mathbb{R}$.
- Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ domeniul de continuitate este $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $f(1-0)=\sqrt{6+4a^2+4a}$, $f(1+0)=1+4a$.

Funcția este continuă în $x_0 = 1$ dacă $\sqrt{6+4a^2+4a}=1+4a$.

Se obține $a=\frac{1}{2}$.

• Pentru $a=\frac{1}{2}$ domeniul de continuitate este $C = \mathbb{R}$, iar pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ avem $C = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

c) Se obține:
$f(0-0) = 2a + 1, f(0 + 0) = a, f(0) = -1 + \sin a\pi$.
Funcția este continuă în $x_0 = 0$ dacă $2a + 1 = a = -1 + \sin a\pi$, adică $a = -1$.
• Pentru $a = -1$, avem $C = [-1, \infty)$, iar pentru $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ se obține $C = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$

d) $f(a-0) = 2^a + a, f(a + 0) = 3^a + a$. Egalitatea $2^a + a = 3^a +$ a conduce la $a = 0$.
• Pentru $a = 0$ avem $C = \mathbb{R}$, iar pentru $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ avem $C = \mathbb{R}\setminus\{a\}$.

S2. *Soluție:*
Se studiază continuitatea funcției f în punctele de legătură, în celelalte puncte ale domeniului de definiție, aceasta fiind continuă.

a) $f(1-0) = 9^a - 4 \cdot 3^{a+1} + 12, f(1 + 0) = a - a - 15 = -15$.
Condiția de continuitate în $x_0 = 1$ conduce la ecuația exponențială $9^a - 4 \cdot 3^{a+1} + 12 = -15$. Notăm $3^a = y > 0$ şi rezultă ecuația $y^2 - 12y + 27 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 3, y_2 = 9$.
Aşadar $3^a = 3$ cu soluția $a = 1$ şi $3^a = 9$ cu soluția $a = 2$.

b) Deosebim cazurile.

• $2a - 1 = a^2$ deci $a = 1$ când $D = \mathbb{R}$, iar $f(x)=\begin{cases}3^{bx}+2x, x\leqslant 1\\ 9x-4^{bx}, x>1\end{cases}$.

Funcția f este continuă în $x = 1$, dacă $f(1-0) = f(1 + 0) = f(1)$, deci dacă $3^b + 2 = 9 - 4^b$. Rezultă ecuația exponențială $3^b + 4^b = 7$ cu soluția unică $b = 1$.

• $2a - 1 \neq a^2$.

În acest caz avem $2a - 1 < a^2$ şi $D=(-\infty, 2a-1]\cup[a^2, +\infty)$, iar funcția este continuă $\forall a\in \mathbb{R}\setminus\{1\}, b\in \mathbb{R}$.

c) Se obține: $f(1-0) = 2^a - 3^b$,
$f(1 + 0) = 3^{a-1} \cdot 2^{1+b}, f(1) = 12$.

Funcția este continuă în $x_0 = 1$ dacă $\begin{cases}2^a\cdot 3^b=12\\ 3^{a-1}\cdot 2^{1+b}=12\end{cases}$.

Sistemul se scrie sub forma $\begin{cases}2^a\cdot 3^b=12\\ 3^a\cdot 2^b=18\end{cases}$.

Înmulțind şi împărțind cele două ecuații ale sistemului se obține:

$$\begin{cases}6^a\cdot 6^b=12\cdot 18\\ \left(\frac{2}{3}\right)^a\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^b=\frac{12}{18}\end{cases} \text{ sau mai simplu scris: } \begin{cases}6^{a+b}=6^3\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{a-b}=\left(\frac{2}{3}\right)^1\end{cases}.$$

Aşadar $\begin{cases}a+b=3\\ a-b=1\end{cases}$ şi rezultă soluția $a = 2, b = 1$.

d) Obținem: $f(1-0)=2^a+3^b$, $f(1+0)=5$, $f(2-0)=5$, $f(2+0)=2^{2a}+3^{2b}-8$.
Funcția f este continuă în $x=1$ şi $x=2$ dacă $2^a+3^b=5$ şi $2^{2a}+3^{2b}-8=5$.

Se obține sistemul de ecuații exponențiale $\begin{cases} 2^a+3^b=5 \\ 2^{2a}+3^{2b}=13 \end{cases}$.

Se notează $2^a=u$, $3^b=v$ şi avem $\begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=13 \end{cases}$.

Se substituie $v=5-u$ în a doua ecuație şi rezultă ecuația de gradul 2 în u: $u^2+(5-u)^2=13$ cu soluțiile $u_1=2$, $u_2=3$. Pentru $u=2$ se obține $v=3$ iar pentru $u=3$ se obține $v=2$.

Aşadar rezultă sistemele de ecuații: $\begin{cases} 2^x=2 \\ 3^y=3 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 2^x=3 \\ 3^y=2 \end{cases}$

cu soluțiile $x=y=1$, respectiv $x=\log_2 3$, $y=\log_3 2$.

S3. *Soluție:*
a) Avem: $f(1-0)=2$, $f(1+0)=a+b+3$, $f(1)=2$.
Funcția f este continuă şi în punctul $x_0=1$ dacă $2=a+b+3$, deci $a+b=-1$.
Avem:

- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(3x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(3x+2)=5$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx+3-a-b-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(a(x+1)+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}a(x+1)+b=$

$$=2a+b.$$

Limita dată există dacă $2a+b=5$.

Rezultă sistemul de ecuații $\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=5 \end{cases}$ cu soluția $a=6$, $b=-7$.

b) Obținem: $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x}\right)=1\cdot0=0$, $f(0+0)=b$.

Funcția este continuă şi în punctul $x_0=0$ dacă $b=0$.

Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)=1\cdot1=1$, iar

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-0}{x}=a$.

Limita există dacă $a=1$. Aşadar $a=1$, $b=0$.

2.2. Operații cu funcții continue

Exersare

E1. *Soluție.*

Toate funcțiile f şi g sunt funcții continue deci $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ şi $\frac{f}{g}$ sunt funcții continue pe domeniul de definiție.

E2. *Soluție:*

a) Avem: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = (2x-3) - 1 = 2x - 4$,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(x-1) - 3 = 2x - 5$.

Funcțiile compuse sunt continue pe $\mathbb{R}$ deoarece sunt funcții elementare (funcții de gradul 1);

b) Avem: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) + 1 = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 1 = (x^2+1) - 1 = x^2$.

Funcțiile obținute prin compunere sunt funcții de gradul 2 şi sunt continue pe $\mathbb{R}$.

c) Avem: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g^2(x)+1} = \sqrt{(x-1)^2+1} = \sqrt{x^2-2x+2}$,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 1 = \sqrt{x^2+1} - 1$.

Funcțiile compuse sunt continue deoarece f şi g sunt continue.

d) Funcțiile f, g sunt continue deci şi $f \circ g$, $g \circ f$ sunt continue.

Avem $(f \circ g)(x) = \ln[(2x-1)^2+1] = \ln(4x^2-4x+2)$, $(g \circ f)(x) = 2\ln(1+x^2) - 1$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

Fie $h = f + g$.

$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x+a, & x \leqslant 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases} + \begin{cases} 2ax, & x \leqslant 0 \\ x - x^2, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x+a+2ax, & x \leqslant 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}.$$

Avem că $h(0-0) = a$ şi $h(0+0) = 1$.

Aşadar $f + g$ este continuă şi în $x_0 = 0$ dacă $a = 1$.

S2. *Soluție:*

a) Deoarece $f(1-0) = -1$ şi $f(1+0) = 1$, funcția f nu este continuă în $x_0 = 1$.

Domeniul său de continuitate este $C = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Funcția $f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este $f^2(x) = \begin{cases} (-1)^2, & x \leqslant 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ 1^2, & x > 1 \end{cases}$ şi este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Avem: $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = -1$ deci f este discontinuă în $x_0 = 1$.

Pentru f^2 avem: $f^2(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.

Se observă că funcția f^2 este continuă pe $\mathbb{R}$.

c) Avem: $f(1-0)=a+1$, $f(1+0)=3$. Dacă $a+1=3$, deci $a=2$, atunci funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi se obține că f^2 este continuă pe $\mathbb{R}$.

Avem $g(x)=f^2(x)=\begin{cases}(x+a)^2, & x\leqslant 1\\(2x+1)^2, & x>1\end{cases}$

Studiem continuitatea funcției f^2 în $x_0=1$.

Se obține: $g(1-0)=(1+a)^2$, $g(1+0)=9$.

Funcția f^2 este continuă în $x_0=1$ dacă $(1+a)^2=9$ deci dacă $a\in\{2,-4\}$.

Aşadar:

• pentru $a=2$, f şi f^2 sunt continue pe $\mathbb{R}$;

• pentru $a=-4$, f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ iar f^2 este continuă pe $\mathbb{R}$;

• pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-4,2\}$ funcțiile f şi f^2 sunt continue pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

d) Avem $f^2(x)=\begin{cases}(2x+a)^2, & x\leqslant 2\\(x+a)^2, & x>2\end{cases}$.

Se obține $f(2-0)=a+4$, $f(2+0)=a+2$, deci f este discontinuă în $x_0=2$ pentru oricare $a\in\mathbb{R}$.

De asemenea, $f^2(2-0)=(a+4)^2$, $f^2(2+0)=(a+2)^2$.

Din egalitatea $(a+4)^2=(a+2)^2$ se obține că $a=-3$.

• Pentru $a=-3$, f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, iar f^2 este continuă pe $\mathbb{R}$.

• Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, funcțiile f şi f^2 sunt continue pe $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

S3. *Soluție:*

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\operatorname{sgn}(x)-4=2\cdot\begin{cases}-1, & x<0\\0, & x=0\\1, & x>0\end{cases}-4=\begin{cases}-6, & x<0\\-4, & x=0\\-2, & x>0\end{cases}$.

Rezultă că $f\circ g$ este discontinuă în $x_0=0$ şi continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $f\circ g$ este continuă pe $\mathbb{R}$ deoarece funcțiile f şi g sunt continue pe $\mathbb{R}$.

c) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}1, & g(x)\leqslant 1\\2, & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}1, & 2x-1\leqslant 1\\2, & 2x-1>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x\leqslant 1\\2, & x>1\end{cases}$.

Rezultă că $f\circ g$ este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

d) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}1-g(x), & g(x)\leqslant 1\\0, & g(x)>1\end{cases}$.

Să rezolvăm inecuația $g(x)<1$.

• Dacă $x\leqslant 1$, se obține că $g(x)=a^2$ şi inecuația este $a^2\leqslant 1$.

Se deosebesc situațiile:

• $a^2\leqslant 1$ deci $a\in[-1,1]$, şi soluția inecuației este $x\leqslant 1$.

• $a^2>1$, deci $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, şi inecuația nu are soluții.

• Dacă $x>1$, atunci $g(x)=x$ şi inecuația este $x>1$, cu soluția $x\in(1,+\infty)$.

Aşadar

• pentru $a\in[-1,1]$, soluția inecuației $g(x)\leqslant 1$ este $x\in\mathbb{R}$, şi obținem că:

$$(f\circ g)(x)=1-g(x)=\begin{cases}1-a^2, & x\leqslant 1\\1-x, & x>1\end{cases}.$$

Rezultă că $(f\circ g)(1-0)=1-a^2$, $(f\circ g)(1+0)=0$.
Funcția $f\circ g$ este continuă dacă $1 - a^2 = 0$, deci dacă $a \in \{-1, 1\}$.

• Pentru $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ soluția inecuației $g(x) \leqslant 1$ este $x > 1$, deci $x \in (1, +\infty)$.
Rezultă că $(f\circ g)(x)=\begin{cases}1-g(x), & x>1\\ 0 & , x\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}1-x, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$ funcție continuă pe $\mathbb{R}$.

S4. *Soluție:*

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}e^{g(x)}, & g(x)\leqslant 0\\ g(x)+1, & g(x)>0\end{cases}$.

Rezolvăm inecuația $g(x) \leqslant 0$.
• Pentru $x > 1$ avem $g(x) = \ln x$ şi inecuația este $\ln x \leqslant 0$, deci $x \in (0, 1]$. Nu sunt soluții.
• Pentru $x \leqslant 1$, $g(x) = x$ şi inecuația este $x \leqslant 1$ cu soluția $x \in (-\infty, 1]$.
Aşadar soluția inecuației $g(x) \leqslant 1$ este $x \in (-\infty, 1]$.
Rezultă că:

$(f\circ g)(x)=\begin{cases}e^{g(x)}, & x\leqslant 1\\ g(x)+1, & x>1,\ x>1\end{cases}=\begin{cases}e^{x}, & x\leqslant 1\\ 1+\ln x, & x>1\end{cases}$ iar $f\circ g$ este discontinuă în $x = 1$ şi continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• Avem $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}\ln f(x), & f(x)>1\\ f(x), & f(x)\leqslant 1\end{cases}$.

Rezolvăm inecuația $f(x) > 1$.

• Pentru $x \leqslant 0$, $f(x) = e^x$ şi inecuația este $e^x > 1$ care are soluția $x > 0$.
  Nu există soluții pentru $f(x) > 1$.
• Pentru $x > 0$, $f(x) = x + 1$ şi inecuația este $x + 1 > 1$, deci $x > 0$.

Aşadar $f(x) > 1$ dacă $x \in (0, +\infty)$. Se obține că $(g\circ f)(x)=\begin{cases}\ln f(x), & x>0\\ f(x), & x\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\ln(x+1), & x>0\\ e^{x} & , x\leqslant 0\end{cases}$

şi $g\circ f$ continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}\sqrt{g(x)}, & g(x)\geqslant 0\\ \sqrt[3]{g(x)}, & g(x)<0\end{cases}$.

Rezolvăm inecuația $g(x) \geqslant 0$.

• Pentru $x \geqslant 0 \Rightarrow g(x) = x^2 \geqslant 0$.
• Pentru $x < 0 \Rightarrow g(x) = 1 + x^3 > 0$, dacă $1 + x > 0$, deci $x > -1$.

Soluția este în acest caz $x \in (-1, 0)$.
Rezultă că $g(x) \geqslant 0$ dacă $x \in (-1, 0) \cup [0, +\infty) = (-1, +\infty)$.

Aşadar:

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}\sqrt{g(x)}, & x\in(-1,+\infty)\\ \sqrt[3]{g(x)}, & x\in(-\infty,-1]\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{g(x)}, & x\in(-1,0)\\ \sqrt{g(x)}, & x\in[0,\infty)\\ \sqrt[3]{g(x)}, & x\in(-\infty,-1]\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{1+x^3}, & x\in(-1,0)\\ \sqrt{x^2}, & x\in[0,+\infty)\\ \sqrt[3]{1+x^3}, & x\in(-\infty,-1]\end{cases}\Rightarrow$$

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1+x^3}\,,\ x\leqslant -1\\ \sqrt{1+x^3}\,,\ x\in(-1,\,0)\\ x,\ x\in[0,\,+\infty)\end{cases}.$$ Rezultă că $f\circ g$ este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

• $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}f^2(x),\ f(x)\geqslant 0\\ 1+f^3(x),\ f(x)<0\end{cases}.$

Rezolvăm inecuația $f(x)\geqslant 0$.

• Pentru $x\geqslant 0$ avem $f(x)=\sqrt{x}$ şi inecuația este $\sqrt{x}\geqslant 0$ cu soluția $x\geqslant[0,+\infty)$.

• Pentru $x<0$ avem $f(x)=\sqrt[3]{x}$ şi inecuația este $\sqrt[3]{x}\geqslant 0$ fără soluții pe $(-\infty,0)$.

Aşadar $f(x)\geqslant 0$ dacă $x\in[0,+\infty)$.

Rezultă că $(g\circ f)(x)=\begin{cases}f^2(x),\ x\geqslant 0\\ 1+f^3(x),\ x<0\end{cases}=\begin{cases}(\sqrt{x})^2,\ x\geqslant 0\\ 1+(\sqrt[3]{x})^3,\ x<0\end{cases}=\begin{cases}x,\ x\geqslant 0\\ 1+x,\ x<0\end{cases}.$

Funcția $g\circ f$ este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\ 0\}$.

2.3. Semnul unei funcții continue pe un interval

Exersare

E1. *Soluție:*
Funcția f este funcție de gradul 1, deci este funcție continuă pe $\mathbb{R}$.
Așadar f are proprietatea lui Darboux pe oricare interval $I \subset \mathbb{R}$.

E2. *Soluție:*
a), b) Se arată că funcțiile sunt continue deci au proprietatea lui Darboux pe I.
c) Funcția f este discontinuă în $x_0 = 0$, punctul $x_0 = 0$ fiind punct de discontinuitate de prima speță. Cum $0 \in I$ rezultă că funcția f nu are proprietatea lui Darboux pe I.

E3. *Soluție:*
a) $D = \mathbb{R}$. Rezolvăm ecuația $f(x) = 0$.
Se obține succesiv: $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x \in \{0, -1, 1\}$.
Alcătuim tabelul de semn:

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad\quad 0 \quad\quad 1 \quad\quad +\infty$
$x^3 - x$	$- - - - 0 + + + 0 - - - 0 + + + + + +$

Avem: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} > 0$, $f(-3) = -24 < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $f(3) = 24 > 0$.

b) $D = 0$. Ecuația $f(x) = 0$ este $2^x - 1 = 0$ cu soluția $x = 0$.
Tabelul de semn, având în vedere că $f(-1) < 0, f(1) > 0$ este:

x	$-\infty \quad\quad 0 \quad\quad +\infty$
$f(x)$	$- - - - - - - - - 0 + + + + + + + + +$

c) $D = \mathbb{R}$. Ecuația $f(x) = 0$ se scrie $3^{x+1} - 9 = 0$ sau $3^{x+1} = 3^2$ și are soluția $x = 1$.
$3^{x+1} = 3^2$ și are soluția $x = 1$.
Tabelul de semn:

x	$-\infty \quad\quad 1 \quad\quad +\infty$
$f(x)$	$- - - - - - - - - 0 + + + + + + + + +$

d) $D = [0, 2\pi]$. Ecuația $f(x) = 0$ este $\sin x = 0$ și are soluțiile $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$. Tabelul de semn:

x	$0 \quad\quad \pi \quad\quad 2\pi$
$\sin x$	$0 + + + + + + + 0 - - - - - - - - 0$

Sinteză

S1. *Soluție:*
Se arată că funcțiile sunt continue pe $\mathbb{R}$, deci au proprietatea lui Darboux pe oricare interval $I \subset \mathbb{R}$.
Vom studia continuitatea funcțiilor doar în punctele de legătură, în rest funcțiile fiind continue.

a) $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1+x)(1+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{4}$, iar

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(4x-4)}{8x^2-8} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin(4x-4)}{4(x-1)} \cdot \frac{4(x-1)}{8(x^2-1)}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)}{8(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{4}.$$

Având $f(1)=0,25=\frac{1}{4}$ rezultă că funcția f este continuă în $x_0 = 1$.

b) $f(1-0)=0$, $f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x-1}\sin(x-1)}{3(x^2-1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{3(x+1)}\right)=1\cdot 0=0$.

Rezultă că f este continuă în $x_0 = 1$.

c) $f(2) = 0$, $f(2+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(1+3^{\frac{1}{x-2}}\right)^{-1}=\left(1+3^{\frac{1}{0_+}}\right)^{-1}=(1+3^{+\infty})^{-1}=\infty^{-1}=\frac{1}{\infty}=0$.

Aşadar f este continuă în $x_0 = 2$.

d) Dacă $x_0 \in \mathbb{Z}$ avem că $f(x_0) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sin\pi x=\sin\pi x_0=0$.

Aşadar f este continuă în $x_0 \in \mathbb{Z}$.

.

S2. *Soluție:*

a) Fie $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5$. Funcția f este funcție continuă, deci are proprietatea lui Darboux pe I.

Avem că $f(0) = -5 < 0$, $f(2) = 19 > 0$, deci există $x_0 \in (0, 2)$ cu $f(x_0) = 0$.

b) Funcția $f: [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 5x - 27$ este continuă şi are proprietatea lui Darboux pe $[0, 3]$. Deoarece $f(0) = -27 < 0$, $f(3) = 15 > 0$ există $x_0 \in (0, 3)$ cu $f(x_0) = 0$;

c) Funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2^x - 2$ este continuă şi $f(0) \cdot f(1) = (-1) \cdot 1 = -1 < 0$.

Din proprietatea lui Darboux rezultă că există $x_0 \in (0, 1)$ cu $f(x_0) = 0$;

d) Funcția $f:\left[-\frac{\pi}{2},\, 0\right]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \sin x$. Avem $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$, $f(0)=1>0$.

Din continuitatea funcției f rezultă că $\exists x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\, 0\right)$ cu $f(x_0) = 0$.

e) Considerăm $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Funcția f este continuă.

Avem $f(1) = 1 > 0$ şi $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+\ln x)=-\infty<0$.

Aşadar există $x_0 \in (0, 1)$ cu proprietatea că $f(x_0) = 0$.

S3. *Soluție:*

a) $D = \mathbb{R}$.

Ecuația $f(x) = 0$ este $x(2^x - 1) = 0$ şi are soluția $x = 0$.

Tabelul de semn al funcției:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+ + + + + + +$ 0 $+ + + + + + + +$

b) $D = \mathbb{R}$. Ecuația $(x - 1)(3^x - 2^x) = 0$ au soluțiile $x = 1$, $x = 0$.

Tabelul de semn:

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+ + + + +$ 0 $- - - -$ 0 $+ + + + + +$

c) $D = (-2, +\infty)$. Avem: $f(x)=0\Rightarrow(3^x-1)\log_2(x+2)=0\Rightarrow 3^x=1$ sau

$\log_2(x+2)=0\Rightarrow x_1=0$ sau $x + 2 = 1$ deci $x \in \{-1, 0\}$.

Tabelul de semn:

x	-2 $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+ + + + +$ $0 - - - -$ $0 + + + + + + +$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ecuația $f(x) = 0$ are soluția $x = 0$.
Tabelul de semn:

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+ + + + +$ $0 - - - -$ $\mid + + + + + + +$

e) $D = [1, 3) \cup (3, +\infty)$.
Ecuația $f(x) = 0$ conduce la $\sqrt{x-1} - 1 = 0$ sau $\sqrt{x-1} = 1$ cu soluția $x = 2$.
Tabelul de semn:

x	1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+ + + + + + 0 - - - - \mid + + + + + + + + + +$

f) $D = \mathbb{R}$. Ecuația $f(x) = 0$ se scrie $(x^3 - x)(x^4 - 16) = 0$ de unde $x^3 - x = 0$ sau $x^4 - 16 = 0$.
Se obțin soluțiile $x \in \{-1, 0, 1, -2, 2\}$.
Tabelul de semn:

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$- - - - - - 0 + + + + + 0 - - - - 0 + + + + + 0 - - -$ $0 + + + +$

S4. *Soluție:*
a) Considerăm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2^x - 1)(x^2 - 1)$, funcție continuă pe $\mathbb{R}$.
Avem de rezolvat inecuația $f(x) \geqslant 0$.
Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt $x \in \{-1, 0, 1\}$. Stabilim semnul funcției f.
Se obține tabelul de semn:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$- - - - -$ $0 + + + + 0$ $- - -$ $0 + + + +$

Rezultă că $f(x) \geqslant 0$ dacă $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$, care reprezintă soluția inecuației date.

b) Fie $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - x^3)(1 - \sqrt{x+1})$. Avem de rezolvat inecuația $f(x) \leqslant 0$.
Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt date de ecuațiile $x - x^3 = 0$ și $1 - \sqrt{x+1} = 0$.
Se obține $x \in \{0, 1, -1\}$. Stabilim semnul funcției continue f. Se obține tabelul de semn:

x	-1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$0 - - -$ $\quad$ $0 - - - - 0 + + + + + + + + + +$

Rezultă că $f(x) \leqslant 0$ pentru $x \in [-1, 1]$, iar soluția inecuației date este $x \in [-1, 1]$.

c) Considerăm funcția continuă $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1 + \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x} - 1)$.
Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt date de ecuațiile $\sqrt{x} - 1 = 0$ și $x - 1 + \sqrt{x^2+1} = 0$.
Obținem $x = 1$, respectiv $\sqrt{x^2+1} = 1 - x$.
Punem condiția $1 - x \geqslant 0$ și prin ridicare la pătrat se obține ecuația $x^2 + 1 = (1 - x)^2$ cu soluția $x = 0$.
Așadar $f(x) = 0$ dacă $x \in \{0, 1\}$. Tabelul de semn al funcției f este:

x	0 $\quad\quad$ 1 $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$0 - - - - 0 + + + + + + + +$

Rezultă că soluția inecuației $f(x) \leqslant 0$ este $x \in [0, 1]$.

d) Fie $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2^x - 3^x)(2 - \log_2(x + 1))$.
Funcția f este continuă.
Din egalitatea $f(x) = 0$ se obțin ecuațiile $2^x - 3^x = 0$ şi $2 - \log_2(x + 1) = 0$.
Rezultă $x = 0$ şi respectiv $\log_2(x + 1) = 2$, de unde $x + 1 = 2^2 = 4$ sau $x = 3$.
Semnul funcției f este dat de tabelul:

x	-1 $\quad\quad$ 0 $\quad\quad$ 3 $\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+ + + + + 0 - - - - 0 + + + + + + +$

Soluția inecuației $f(x) \leqslant 0$ este $x \in [0, 3]$.

S5. *Soluție:*
a) Funcțiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $h(x) = e^x$ sunt funcții strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci şi suma lor $f = g + h$ este funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Avem: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x + e^x) = -\infty + e^{-\infty} = -\infty + 0 = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty + e^{\infty} = +\infty$.
Funcția f fiind continuă rezultă, folosind proprietatea lui Darboux, că ia toate valorile intermediare dintre $-\infty$ şi $+\infty$, adică $\mathrm{Im} f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.
Aşadar funcția f este surjectivă.
Observație.
Funcția f fiind strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ este funcție injectivă. Aşadar funcția f este funcție bijectivă.

Teste de evaluare

Testul 1

Soluții

1. Funcția f este continuă pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ având în vedere operațiile cu funcții continue.
Studiem continuitatea funcției f în punctele $-1, 0, 1$.
Obținem:

- $f(-1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-2}{0_-} = +\infty$
- $f(1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0_-} = -\infty$
- $f(0-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x-1}{x+1} = -1$.

Aşadar funcia f nu este continuă pentru $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$, deoarece limitele laterale în acestea nu sunt egale cu valoarea funcției în x_0.

2. Pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ funcția f este continuă. Studiem continuitatea în $x_0 = 1$. Avem:
$f(1-0) = 1 + 2^a$, $f(1+0) = 4^a - 1$. Din egalitatea $f(1-0) = f(1+0)$ se obține $1 + 2^a = 4^a - 1$, iar cu notația $y = 2^a$ rezultă ecuația $y^2 - y - 2 = 0$. Se obține $y \in \{-1, 2\}$ şi apoi $a = 1$.

3. Ecuația $f(x) = 0$ conduce la ecuațiile $2^{x-1} - 1 = 0$ şi $3^{x-1} - 9 = 0$. Rezultă că $2^{x-1} = 1 = 2^0$, respectiv $3^{x-1} = 3^2$, deci $x \in \{1, 3\}$.
Tabelul de semn al funcției continue f este:

x	$0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 3 \qquad\qquad +\infty$
$f(x)$	$+ + + + + \; 0 - - - - \; 0 + + + + + +$

Testul 2

Soluții

1. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ având în vedere operațiile cu funcții continue.
Studiem continuitatea în $x_0 = 0$ şi $x_0 = 1$.

- $f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \cdot 4 = 4$, iar $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0} (ax+b) = b$
- $f(1-0) = a + b$, $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x+1}\right) = 1$.

Rezultă că:

- f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă $\begin{cases} b = 4 \\ a + b = 1 \end{cases}$ deci $a = -3$, $b = 4$.

• f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dacă $b = 4$ şi $a \neq -3$.
• f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dacă $b \neq 4$ şi $a + b \neq 1$.

2. a) Dacă $x \in \mathbb{Q}$, din $f(x) = 3{,}5$ rezultă că $x = 3{,}5 \notin [2, 3]$.
Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, din f(x) = 3,5 se obţine $x^2 = 3{,}5$ sau $x \in \{-\sqrt{3{,}5}, \sqrt{3{,}5}\}$. Dar $\sqrt{3{,}5} < 2$ şi nu există x cu proprietatea cerută.
b) Avem $f(2) = 2$ şi $f(\sqrt{5}) = 5$.
Pentru $\lambda = 3{,}5 \in [2, 5]$, nu există $\alpha \in [2, \sqrt{5}]$ astfel încât $f(\alpha) = 3{,}5$. Aceasta deoarece $[2, \sqrt{5}] \subset [2, 3]$ şi se are în vedere punctul a).
Aşadar f nu are proprietatea lui Darboux.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2^x - 16)(x - x^3)$. Inecuaţia dată se scrie $f(x) \leqslant 0$. Vom stabili semnul funcţiei continue f. Ecuaţia $f(x) = 0$ conduce la ecuaţiile $2^x - 16 = 0$ şi $x - x^3 = 0$, cu soluţiile $x \in \{4, 0, 1, -1\}$.
Alcătuim tabelul de semn pentru f:

x	$-\infty$ -1 0 1 4 $+\infty$
$f(x)$	$- - - - - - 0 + + + + 0 - - - - 0 + + + + 0 - - -$

Soluţia iencuaţiei $f(x) \leqslant 0$ este $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [4, +\infty)$.

Testul 3

Soluţii

1. Fie $x_0 \in \mathbb{Z}$. Se obţine:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (x[x]) = x_0(x_0 - 1) \text{ şi } f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} x[x] = x_0 \cdot x_0 = x_0^2.$$

Funcţia f are limită în x_0 dacă şi numai dacă $x_0(x_0 - 1) = x_0^2$ deci numai dacă $x_0 = 0$.
Aşadar f este continuă în $x_0 = 0$ şi discontinuă în oricare $x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2. Avem: $f(a - 0) = a^2 + 2a$, $f(a + 0) = 2a + a^3$.
Din egalitatea $f(a - 0) = f(a + 0)$ se obţine ecuaţia $a^2 + 2a = 2a + a^3$ cu soluţia $a \in \{0, 1\}$.
Aşadar:
• pentru $a \in \{0, 1\}$, funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$,
• pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ funcţia este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

3. Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = a$.
Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi are tabelul de semne:

x	$-\infty$ a $+\infty$
$f(x)$	$+ + + + + + + \; 0 + + + + + + + + +$

Testul 4

Soluții

1. Avem: $f(n)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n^2 6^x+1}{3^x}\cdot\frac{2^x}{n\cdot 4^x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^2\cdot 12^x+2^x}{n\cdot 12^x+3^x}=\frac{n^2}{n}=n$.

Aşadar: $f(1)+f(2)+...+f(n)=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Considerăm funcția $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x$.
Funcția g este continuă şi avem:
$g(a)=f(a)-a\geqslant 0$, $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. Folosind proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$ pentru funcția g rezultă că există $x_0\in[a,b]$ cu $g(x_0)=0$, adică $f(x_0)-x_0=0$.

3. Tabelul de semn:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\,-\,-\,-\,-\;\;0+++0++++0----0++++$

Capitolul III. Funcții derivabile
3.1. Derivata unei funcții într-un punct

Exersare

E1. *Soluție:*
a) Studiem existeța derivatei funcției f în punctul $x_0 = 2$.
Rezultă că:

$f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-4x-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(3x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(3x+2) = 8$, deci funcția f este derivabilă în $x_0 = 2$, graficul său admite tangentă în $x_0 = 2$, iar tangenta are panta $m = 8$.

b) Avem: $f_s'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{2x^2-3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(2x-3) = -3$ și $f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{5x^2-3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(5x-3) = -3$.

Așadar $f'(0) = -3$ și graficul funcției admite tangentă în $x_0 = 0$, panta fiind $m = -3$.

c) Avem: $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geqslant 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases}$.

Se obține că $f_s'(1) = 0$ și $f_d'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{2x-1-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{2(x-1)}{x-1} = 2$, deci f nu are derivată în $x_0 = 1$ și graficul său nu admite tangentă în $x_0 = 1$.

d) Avem $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x|x| = 0$.
Așadar graficul funcției admite tangentă în $x_0 = 0$.

E2. *Soluție:*
a) Se obține: $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x+11-8}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3(x+1)}{x+1} = 3$;

b) $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x-11+13}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1$.

c) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+5}-\frac{1}{5}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5-x-5}{5(x+5)x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{5(x+5)} = -\dfrac{1}{25}$.

d) $f'_{(0)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

e) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2^x+3-2^{-1}-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2^x-2^{-1}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2^{x+1}-1}{2(x+1)} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

f) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x+\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+2\dfrac{\sin 2x}{2x}\right) = 1+2+3$.

E3. *Soluție:*
a) Avem:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{2x-x^2-2x_0+x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2(x-x_0)-(x^2-x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}[2-(x+x_0)] = 2-2x_0.$$

În particular se obține că f (0) = 2, f (1) = 0, f (2) = –2.

b) Avem $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2$.
În particular se obține că $f'(0)=0$, $f'(1)=3, f'(-1)=3$.

c) Avem: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin mx}{x}+1\right)=2$ şi

$$f'(\pi)=\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x+x-\pi}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi}\left(1+\frac{\sin x}{x-\pi}\right).$$

Deoarece $\sin(x-\pi)=\sin x\cdot\cos\pi-\sin\pi\cdot\cos x=-\sin x$ avem că

$$f'(\pi)=\lim_{x\to\pi}\left(1-\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right)=1-1=0$$

d) Avem:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x_0}{x_0^2+1}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x\left(x_0^2+1\right)-x_0(x^2+1)}{(x-x_0)(x^2+1)(x_0^2+1)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(1-xx_0)}{(x-x_0)(x^2+1)(x_0^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1-xx_0}{(x^2+1)(x_0^2+1)}=\frac{1-x_0^2}{(x_0^2+1)^2}.$$

În particular se obține: $f'(-1)=0,\ f'(1)=0,\ f'(0)=1$.

E4. *Soluție:*

a) Avem $f_s'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\dfrac{|x-1|-0}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\dfrac{1-x}{x-1}=-1$, iar $f_d'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

b) $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{x+|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{x-x}{x}=0$, iar $f_d'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{x+|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x}{x}=2$.

c) $f_s'(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}}\dfrac{x+1-0}{x+1}=1$ şi $f_d'(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>-1}}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=-2$.

d)

$$f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}}\frac{\sin(\pi x)-\sin\pi}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}}\frac{2\cdot\sin\dfrac{\pi x-\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi x+\pi}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\sin\dfrac{\pi(x-1)}{2}}{\dfrac{\pi(x-1)}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x+\pi}{2}\right)=$$

$$=2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\pi=-\pi,\text{ iar } f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}}\frac{\ln x-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+x-1)}{x-1}=1.$$

Sinteză

S1. *Soluție:*
Se studiază derivaiblitatea funcției în punctele date:
a) $f_s'(x)(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}(x+|x|+1)=1$, $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\cos x=\cos 0=0$, deci f (0) = 1.

- $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+|x|+1-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-x}{x+1}=0$,

• $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos x-\cos 2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}-2\dfrac{\sin\dfrac{x-2}{2}\cdot\sin\dfrac{x+2}{2}}{x-2}=-1\cdot\sin 2=-\sin 2$.

Aşadar graficul funcţiei f admite tangente în punctele date.

b) • $f_s'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-e^0}{x+1}=\ln e=1$, $f_d'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\dfrac{1+e^{x+1}}{2}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{2(x+1)}=\dfrac{1}{2}$.

• $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1+e^{x+1}}{2}-\dfrac{1+e}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+1}-e}{2x}=\dfrac{e}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{e}{2}$.

Graficul admite tangentă în $x=0$ şi nu admite tangentă în $x=-1$.

c) Se obţine: $f\ '(-1)=e^{-2}$, $f'(2)=\dfrac{2}{5}$, deci graficul admite tangentă în $x_0\in\{-1, 2\}$.

• $f_s'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-1}-1-e^{-1}+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-1}-e^{-1}}{x}=e^{-1}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{1}{e}$, iar

• $f_d'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\right)=2$.

Aşadar graficul funcţiei nu admite tangentă în $x_0=0$.

S2. *Soluţie:*

a) Funcţia este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Studiem continuitatea în $x_0=0$.

Rezultă că $f(0-0)=0$, $f(0+0)=-1$ deci f este discontinuă în $x_0=0$ pentru oricare $a\in\mathbb{R}$.

Funcţia f nu este derivabilă în $x_0=0$ deoarece nu este continuă în $x_0=0$.

b) Avem: $f(2-0)=4+2a+b$, $f(2+0)=8-a$.

Funcţia este continuă în $x_0=2$ dacă $8-a=4+2a+b$ deci $3a+b=4$.

Studiul derivabilităţii în $x_0=2$.

• $f_s'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b-4-2a-b}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4+a(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2+x)}{x-2}=4+a$.

• $f_d'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-a-8+a}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$.

Funcţia este derivabilă în $x_0=2$ dacă $4+a=4$ deci dacă $a=0$.

Din egalitatea $3a+b=4$ se obţine $b=4$.

Aşadar:

- dacă $a=0$, $b=4$ funcţia este continuă şi derivabilă în $x_0=2$;
- dacă $3a+b=4$, $a\neq 0$, funcţia este continuă dar nu este derivabilă în $x_0=2$;
- dacă $3a+b\neq 4$ funcţia nu este continuă, deci nici derivabilă în $x_0=2$.

c) Avem: $f(x)=\begin{cases}x,\ x\geqslant 1\\ 2x-1,\ x<1\end{cases}$.

Se obţine $f(1-0)=1$, $f(1+0)=1$, $f(1)=1$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

De asemenea $f_s'(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{2x-1-1}{x-1}=2$ şi $f_d'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$, deci f nu este derivabilă în $x_0=1$.

d) $D = [0, +\ \ )$. Avem $f(1-0) = \arccos 1 + b = b$, $f(1+0) = a$.

Rezultă că f este continuă în $x_0 = 0$ dacă $a = b$.

Pentru $a = b$ rezultă că $f_d'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)(x-1)}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \sqrt{\dfrac{2}{0_+}} = +\infty$.

Aşadar pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$, f nu este derivabilă în $x_0 = 1$.

S3. *Soluții:*

a) Deoarece $f(1-0) = -1 = f(1+0)$ funcția f este continuă în $x_0 = 1$. Se obține:

$$f_s'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{2x-1-1}{x-1} = 2 \text{ şi } f_d'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3.$$

Rezultă că $x_0 = 1$ este punct unghiular pentru f.

b) Funcția este continuă în $x_0 = 0$.

Rezultă că $f_s'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ şi $f_d'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Punctul $x_0 = 0$ este punct unghiular pentru f.

c) Funcția este continuă în $x_0 = 0$.

Se obține că $f_s'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-0}{x} = 0$ şi $f_d'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Aşadar $x_0 = 0$ este punct unghiular.

S4. *Soluție:*

a) Funcția f este continuă în $x_0 = 1$.

Se obține că $f_s'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)^2}} = -\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = -\infty$, iar

$$f_0'(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$$

Aşadar punctul $x_0 = 1$ este punct de întoarcere.

b) Funcția f este continuă în $x_0 = 3$.

Se obține că $f_x'(3) = -\infty$, $f_d'(3) = +\infty$ deci $x_0 = 3$ este punct de întoarcere.

S5. *Soluție:*

Funcțiile f şi g admit tangentă comună în punctul x_0 dacă $f(x_0) = g(x_0)$ şi $f\ \ (x_0) = g\ (x_0)$, adică punctul de abscisă x_0 este comun graficelor şi tangentele în x_0 la cele două grafice au aceeaşi pantă.

a) Se obțin condițiile: $f(1) = g(1)$ şi $f\ \ (1) = g\ (1)$.

Rezultă că $2 + a = 1 + b + b$ şi $2 = 2 + b$, adică $b = 0$, $a = -1$.

b) Se pun condițiile $f(1) = g\ (1)$, $f\ \ (1) = g\ (1)$ şi rezultă egalitățile:

$1 + a + b = 2 - 1 + 1$ şi $2 + a = 3$, deci $a = 1$, $b = 0$.

Observație:

Funcțiile f şi g fiind de gradul 1 sau 2 graficele lor sunt tangente în $x_0 \in$ D, dacă ecuația $f(x) = g(x)$ are o soluție reală dublă x_0.

a) Ecuația $f(x) = g(x)$ se scrie $x^2 + bx + b = 2x + a$ sau $x^2 + (b-2)x + b - a = 0$.

Se pune condiția ca $x_0 = 1$ să fie soluție dublă.
Avem: $1 + (b - 2) + b - a = 0$ şi $0 = \Delta = (b - 2)^2 - 4(b - a)$.
Rezultă sistemul de ecuații $\begin{cases} 2b - a = 1 \\ b^2 - 8b + 4a = -4 \end{cases}$ cu soluția $a = -1$, $b = 0$.

S6. *Soluție:*
a) Tangenta la graficul funcției g în punctul $x_0 = 1$ are panta

$$g'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + cx + 1 - c - 4}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x^2 - 1) + c(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{[3(x+1) + x](x - 1)}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}[3(x+1) + c] = 6 + c .$$

Panta dreptei $y = 7x - 6$ este $m_1 = 7$.
Cele două drepte sunt paralele dacă $m = m_1$ deci $6 + c = 7$, adică pentru $c = 1$.

b) Panta tangentei în $x_0 = 1$ la graficul lui f este egală cu

$$m = f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 + ax^2 + b - 1 - a - b}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 - 1) + a(x^2 - 1)}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\left[(x^2 + x + 1) + a(x + 1)\right] = 3 + 2a$$

Condiția de paralelism a tangentei cu deapta $y = 5x + 1$ impune egalitatea $3 + 2a = 5$, deci $a = 1$.
Tangenta în $x_0 = -1$ la graficul funcției f are ecuația
$y - f(x_0) = f\ (x_0)(x - x_0)$ adică $y - f(-1) = f\ (-1)(x + 1)$ sau $y + 1 - a - b = (3 - 2a)(x + 1)$
care adusă la o formă mai simplă se scrie pentru $a = 1$: $y = x + 1 + b$.
Deoarece tangenta trebuie să aibă ecuația $y = x + 5$ se obține că $1 + b = 5$ deci $b = 4$.

S7. *Soluție:*
Punctele comune ale graficelor sunt date de ecuația $f(x) = g(x)$.
Se obține ecuația $x_0^2 + (a - b)x_0 + b - a = 0$ (1), unde $x_0 \in \mathbb{R}$ reprezintă abscisa punctelor comune.
Tangentele în punctele x_0 trebuie să aibă aceeaşi pantă.
Aşadar se pune condiția $f\ (x_0) = g\ (x_0)$. Se obține $4x_0 + a = 2x_0 + b$ de unde $a - b = -2x_0$. Înlocuind $a - b = -2x_0$ în relația (1) se obține $x_0^2 + (-2x_0)x_0 + 2x_0 = 0$ cu soluția $x_0 \in \{0, 2\}$.
Aşadar rezultă $a = b$, pentru $x_0 = 0$, respectiv $a = b - 4$, pentru $x_0 = 2$.
Se obțin funcțiile $f(x) = 2x^2 + ax + a$, $g(x) = x^2 + ax + a$, cu tangenta comună în $x_0 = 0$, respectiv $f(x) = 2x^2 + ax + a + 4$, $g(x) = x^2 + (a + 4)x + a$ cu tangentă comună în $x_0 = 2$.

3.3 Operații cu funcții derivabile

Exersare

E1. *Soluții:*

a) $D = \mathbb{R}, f\ (x) = 3x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$;

b) $D = \mathbb{R}, f\ (x) = 2 - 4x^3, x \in \mathbb{R}$;

c) $D = [0, +\ \ ),\ f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x \in (0, +\infty)$;

d) $D = \mathbb{R}, f\ (x) = 3x^2 + \cos x - \sin x, x \in \mathbb{R}$;

e) $D = (0, +\ \ ),\ f'(x) = 6x^2 + \dfrac{1}{x},\ x \in (0, +\infty)$;

f) $D = \mathbb{R}, f\ (x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - 1, x \in \mathbb{R}$;

g) $D = (0, +\ \ ),\ f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 2} + \dfrac{1}{x \ln 3},\ x \in (0, +\ \ )$;

h) $D = \mathbb{R}, f\ (x) = 4\cos x + 5\sin x, x \in \mathbb{R}$;

i) $D = (0, +\ \ )\ f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x \ln 3} + \cos x,\ x \in (0, +\infty)$;

j) $D = [0, +\infty) \setminus \left\{\pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\};\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \in D \setminus \{0\}$

k) $D = \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 2, f\ (x) = 4x, x \in \mathbb{R}$;

l) $D = [0, +\infty), f'(x) = \dfrac{2 \cdot 1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{x \ln 0{,}5},\ x \in (0, +\infty)$;

m) $D = (0, +\infty),\ f(x) = 3\log_3 x + 4\log_2 x,\ f'(x) = \dfrac{3}{x \ln 3} + \dfrac{4}{x \ln 2},\ x \in (0, +\infty)$;

n) $D = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\pm\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} \cup \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\right)$,

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x};\ x \in D;$$

p) $D = \mathbb{R},\ f'(x) = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2},\ x \in \mathbb{R}$;

q) $D = \mathbb{R},\ f(x) = 2 \cdot 2^x + \dfrac{1}{3} \cdot 3^x,\ f'(x) = 2 \cdot 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{3} 3^x \ln 3,\ x \in \mathbb{R}$.

E2. *Soluții:*

a) $D = (0, +\infty),\ f'(x) = \log_2 x + x \cdot \dfrac{1}{x \ln 2} = \log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2},\ x \in (0, +\infty)$;

b) $D = [0, +\ \ )$, $f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x} = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$, $x \in D \setminus \{0\}$.

Pentru $x = 0$ se obține: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{x} = 0$.

Aşadar $f'(x) = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$;

c) $D = \mathbb{R}, f\ \ (x) = \sin x + x\cos x, x \in \mathbb{R}$;

d) $D = \mathbb{R}, f\ \ (x) = 2^x\cos x - x^2\sin x, x \in \mathbb{R}$;

e) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2^x \ln 2(3^x - 1) + (2^x - 1)\cdot 3^x \ln 3$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $D = (0, +\ \ )$, $f'(x) = \dfrac{2}{x}\log_2 x + (2\ln x + 1)\dfrac{1}{x\ln 2}$, $x \in (0, +\infty)$;

g) $D = [0, +\ \ )$, $f'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x + \sqrt[3]{x}\right) + (x - \sqrt{x})\left(1 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$, $x \in (0, +\infty)$;

Pentru $x = 0$ avem:

$$f'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt[3]{x})}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2 - x\sqrt[3]{x} - x\sqrt{x} - \sqrt{x} - \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x - \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}) - \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^{\frac{5}{6}}}{x} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} = -\frac{1}{0_+} = -\infty;$$

h) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\cdot(3 - x^2)\cdot(3 - x^2)' = 3\cdot(3 - x^2)\cdot(-2x) = -6x(3 - x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;

i) $D = [0, +\ \ )$, $f'(x) = 3\cdot(x - \sqrt{x})^2\cdot(x - \sqrt{x})' = 3(x - \sqrt{x})^2\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$, $x \in (0, +\infty)$.

Pentru $x = 0$ se obține:

$$f'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(x-\sqrt{x})^3}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^3 - 3x^2\sqrt{x} + 3x^2 - x\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2 - 3x\sqrt{x} + 3x - \sqrt{x}) = 0;$$

j) $D = (0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} + 2\cdot\ln x(\ln x)' = \ln x + 1 + 2\dfrac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$;

k) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin^2 x + x(\sin^2 x)' = \sin^2 x + x\cdot 2\sin x\cdot\cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

l) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = (x-1)e^x(x+1) = (x^2-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

E3. *Soluție:*

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{1'\cdot x - 1\cdot x'}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$, $x \in D$;

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{1'\cdot x^2 - 1\cdot(x^2)'}{x^4} = -\dfrac{2x}{x^4} = -\dfrac{2}{x^3}$, $x \in D$;

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)'x - (x-1)x'}{x^2} = \dfrac{x - x + 1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in D$;

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, $x \in D$;

e) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 1)'(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} =$

$$=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2(-1+x^2)}{(x^2+x+1)^2},\ x\in\mathbb{R};$$

f) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$;

g) $D=\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\},\ f'(x)=\dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{1}{1+\cos x},\ x\in D$;

h) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\},\ f'(x)=\dfrac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}=\dfrac{-1}{1+\sin x},\ x\in D$;

i) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\},\ f'(x)=\dfrac{\sin x-\cos^3 x-\sin x\cdot\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x},\ x\in D$;

j) $D=(0,+\infty),\ f'(x)=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(x+1-\ln x)-(x+1+\ln x)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{(x+1-\ln x)^2}=\dfrac{2(x+1-x\ln x)}{x(x+1-\ln x)^2}$,
$x\in(0,+\infty)$;

k) $D=[0,+\infty),\ f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}-2x}{2(1+\sqrt{x})^2},\ x\in[0,+\infty)$;

l) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{e^x}{(2+e^x)^2},\ x\in\mathbb{R}$;

m) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\},\ f'(x)=\dfrac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}\,x)^2},\ x\in D$;

n) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\},\ f'(x)=\dfrac{1-2\mathrm{tg}\,x-4\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}^4 x}{(1+\mathrm{tg}x)^2},\ x\in D$.

E4. *Soluție:*

a) $D=\mathbb{R}, f'(x)=3x^2-12, x\in\mathbb{R}$. Se obțin soluțiile $x\in\{-1,1\}$.

b) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=6x^2-30x+23=6(x^2-5x+4),\ x\in\mathbb{R}$.
Mulțimea de soluții $\{1;4\}$.

c) $D=D_{f'}=\mathbb{R}, f'(x)=(2x+6)e^x+(x^2+6x-15)e^x=e^x(x^2+8x-9)$.
Soluțiile: $x\in\{1,-9\}$.

d) $D=D_{f'}=(0,+\infty), f(x)=2x\ln x+x^2\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$.

Se obține ecuația $2\ln x+1=0$ sau $\ln x=-\dfrac{1}{2}$ cu soluția $x=e^{-\frac{1}{2}}$.

e) $D=D_{f'}=\mathbb{R}-\{2,4\}, f'(x)=\dfrac{-(2x-6)}{(x^2-6x+8)^2}$. Soluția $x=3$.

f) $D=D_{f'}=\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{-2(x^2-4+3)}{(x^2-5x+7)^2}$. Soluțiile $x\in\{1,3\}$.

g) $D = D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{ \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}, f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x)}{\cos^2 x}$.

Se obține ecuația $1 + 2\sin x = 0$ sau $\sin x = -\frac{1}{2}$, cu soluțiile

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

h) $D = D_{f'} = (0, +\infty), f'(x) = \frac{3(x^2 - 1)}{2x\sqrt{x}}$. Soluția $x = 1$.

S1. *Soluție:*

a) Calculăm mai întâi:

- $(x\sin x+\cos x)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$
- $(x\cos x-\sin x)'=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

Rezultă că:

$$f'(x)=\frac{(x\sin x+\cos x)'(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(x\cos x-\sin x)'}{(x\cos x-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)+x\sin x(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}=\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2};$$

b) Avem:

$$f'(x)=-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)+e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)=e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

S2. *Soluție:*

a) $f'(x)=\dfrac{6x(x-1)-3x^2+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-6x+2}{(x-1)^2}, x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Tangenta în x_0 are panta $m=f'(x_0)$ şi este paralelă cu $y=2x-1$ dacă $m=2$.
Rezultă ecuația $f'(x_0)=2$, adică $3x_0^2-6x_0+2=2(x_0-1)^2$ cu soluțiile $x_0\in\{0,2\}$.

c) Două drepte sunt perpendiculare dacă produsul pantelor lor este egal cu -1.
Tangenta în x_0 are panta $m=f'(x_0)$ iar dreapta $y=x$ are panta $m_1=1$.

Se obține relația $f'(x_0)=-1$ sau $3x_0^2-6x_0+2=-(x_0-1)^2$, cu soluțiile $x_0\in\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$.

S3. *Soluție:*

Avem: $f'(x)=\dfrac{x^2+1-(x+a)2x}{(x^2+1)^2}$, $g'(x)=\dfrac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2}$.

Se obține egalitatea, după reducere: $e^x(-2ax-2x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ şi rezultă că $a=-1$.

S4. *Soluție*:

Obținem $f'(x)=\dfrac{x^2+x+1-(x+m)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}, x\in\mathbb{R}$.

Condiția $f'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ conduce la $-x^2-2mx+1-m<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Se impune condiția $\Delta<0$, adică $4(m^2-m+1)<0$ şi nu există m cu această proprietate.

S5. *Soluție*

a) Avem $f'(x)=e^x\left[x^2+(m+2)x+2m\right], x\in\mathbb{R}$.

Inegalitatea $f'(x_0)<0$ are loc pentru $x\in[-2,2]$, dacă $x=-2$ şi $x=2$ sunt soluții pentru $f'(x_0)=0$. Se obține $m=-2$.

b) $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$. Rezultă că

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}.$$

3.3.5. Derivarea funcțiilor inverse (pag...)

Exersare

E1. *Soluții:*

a) $f'(x)=3(x^2+1)^2(x^2+1)'=3\cdot(x^2+1)^2\cdot 2x=6x\cdot(x^2+1)^2,\ x\in\mathbb{R}$;

b) $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\dfrac{2x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$;

c) $f'(x)=\dfrac{1'}{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}\cdot\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)'=\dfrac{2}{x^2-1},x\in(-1,1)$;

d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}}\cdot\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)'=\dfrac{\sqrt{1+x^2}\cdot(1-x^2)}{2\sqrt{x}\cdot(x^2+1)^2},x\in(0,\infty)$;

e) $f'(x)=e^{x^2}+x\cdot e^x\cdot(x^2)'=e^{x^2}(1+2x^2),x\in\mathbb{R}$;

f) $f'(x)=\cos(x^2+1)\cdot(x^2+1)'=2x\cos(x^2+1),x\in\mathbb{R}$;

g) $f'(x)=-\sin(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+1)'=-(2x+1)\sin(x^2+x+1),x\in\mathbb{R}$;

h) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x;x\in(0,\pi)$;

i) $f'(x)=\sqrt{x^2+1}+x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}},x\in\mathbb{R}$;

j) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{xe^x}}\cdot(xe^x)'=\dfrac{e^x(x+1)}{2\sqrt{xe^x}},x\in(0,+\infty)$.

E2. *Soluții:*

a) $f'(x)=\dfrac{(1+\sin^2x)'}{1+\sin^2x}=\dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^2x}=\dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2x},x\in\mathbb{R}$;

b) $f'(x)=\dfrac{(1+e^x)'}{1+e^x}=\dfrac{e^x}{1+e^x},x\in\mathbb{R}$;

c) $f'(x)=\dfrac{(1+\sin^2x)'}{2\sqrt{1+\sin^2x}}=\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2x}},x\in\mathbb{R}$;

d) $f'(x)=\cos(x\sqrt{x})\cdot(x\sqrt{x})'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\cdot\cos(x\sqrt{x}),x\in(0,+\infty)$;

e) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{4-x^2}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}},x\in(0,2)$;

f) $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}\right)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2}}\cdot\dfrac{-1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}},x\in(3,+\infty)$

E3. *Soluții:*

a) Pentru $x_0 \in (1,+\infty)$ se obține că $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$, iar pentru $x_0 = 1$, avem:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty .$$

Rezultă că domeniul de derivabilitate este $(1,+\infty)$.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty)=D_{f'}$.

c) $f(x)=\begin{cases}(x^2-1)^3, x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\\ (1-x^2)^3, x\in(-1,1)\end{cases}$

Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Studiem derivabilitatea în $x_0\in\{-1,1\}$.

$$f_d'(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{(x^2-1)^3}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+1)^2\cdot(x-1)^3=0 \text{ şi } f_s'(-1)=0 .$$

Analog se obține că $f'(1)=0$.

Aşadar f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

d) Pentru $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ se obține că $f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}, x>0$ şi $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}, x<0$.

Pentru $x = 0$ avem

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{e^{-x}-1}{2}\right)}{\frac{e^{-x}-1}{2}}\cdot\frac{e^{-x}-1}{2\cdot x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{2}\ln e=-\frac{1}{2}.$$

$$f'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\left(1+\frac{e^{-x}-1}{2}\right)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{e^{x}-1}{2}\right)}{\frac{e^{x}-1}{2}}\cdot\frac{e^{x}-1}{x}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Aşadar f nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

e) $f(x)=\begin{cases}-\arcsin x, x\in[-1,0]\\ +\arcsin x, x\in(0,1)\end{cases}$. Avem $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,0)\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(0,1)\end{cases}$.

Pentru $x = 0$, $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{-\arcsin x}{x}=-1$ şi $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

Aşadar f nu este derivabilă în $x = 0$.

De asemenea f nu este derivabilă în $x_0 = -1$.

f) $f(x)=\begin{cases}\arccos(-x), x\in[-1,0]\\ \arccos x, x\in(0,1]\end{cases}=\begin{cases}\pi-\arccos x, x\in[-1,0]\\ \arccos x, x\in(0,1]\end{cases}$.

Funcția f nu este derivabilă în $x_0\in\{-1,1\}$ deoarece funcția arccos nu este derivabilă în $x_0\in\{-1,1\}$. Pentru $x=0$ avem:

$$f_d'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\arccos x-\arccos 0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x-\frac{\pi}{2}}{x}=-1 \text{ şi}$$

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\pi-\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

Aşadar f nu este derivabilă în $x_0=0$.

E4. *Soluție:*

a) Funcția f este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$, deci este funcție injectivă.

Deoarece f este funcție continuă, $f(0)=3$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, din proprietatea lui Darboux rezultă că f ia toate valorile intermediare de la 3 la $+\infty$.

Aşadar $\operatorname{Im} f=[3,+\infty)$ şi f este surjectivă. Deci f este bijectivă.

Analog, g este strict crescătoare pe R, deci este injectivă.

Fiind continuă şi având $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$, rezultă că Im$f$=$(-\infty, +\infty)$= R , deci g este surjectivă.

În concluzie g este bijectivă.

b) Rezultă: $\left(f^{-1}\right)'(4)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, unde $f(x_0)=4$.

Din relația $f(x_0)=4$ se obține că $x^2+3=4$, deci $x_0=1$.

Aşadar $\left(f^{-1}\right)'(4)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$.

Analog: $\left(g^{-1}\right)'(8)=\dfrac{1}{g'(2)}=\dfrac{1}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{12}$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

a) $D=\mathrm{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\\ \sqrt{1-x^2}, x\in(-1,1)\end{cases}$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1)\end{cases},\ D_{f'}=\mathrm{R}-\{-1,1\}$$

b) $f'(x)=\dfrac{(1-\ln x)'}{2\sqrt{1-\ln x}}=\dfrac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}}, x\in(0,e)$.

c) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)'$.

Dar $\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)'=\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

De asemenea: $1-\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2=\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\left(1+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x^2+1)^2}=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$.

Aşadar $f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}}\cdot\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{|x^2-1|(x^2+1)}=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2+1}, x\in(-1,1)\\ \dfrac{-2}{x^2+1}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$.

Aşadar $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

d) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$.

Avem: $1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=\left(1-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}$ şi $\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$.

Rezultă că:

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)}{4|x|}\cdot\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=\begin{cases}\dfrac{-1}{1+x^2}, x>0\\ \dfrac{1}{1+x^2}, x<0\end{cases}.$$

Aşadar $D_{f'}=\mathbb{R}^*$.

e) $f(x)=x^{\sqrt{x}}=e^{\ln(x^{\sqrt{x}})}=e^{\sqrt{x}\ln x}$, iar

$f'(x)=e^{\sqrt{x}\ln x}(\sqrt{x}\cdot\ln x)'=x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)=x\sqrt{x}\,\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}, x>0$.

f) $f(x)=e^{\ln(x+1)\ln x}$ şi $f'(x)=x^{\ln(x+1)}\left(\ln(x+1)(\ln x)\right)'=x^{\ln(x+1)}\left(\dfrac{\ln x}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right), x>0$.

S2. *Soluţii:*

a) $D=\mathbb{R}, f'(x)=3\cdot(2x^2-6x)^2\cdot(4x-6), x\in\mathbb{R}$.

Ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x\in\left\{0,3,\dfrac{3}{2}\right\}$.

b) $D=[0,\pi], f'(x)=-2\sin x\cos x+2\sin 2x=\sin 2x, x\in D$.

Soluțiile ecuației sin $2x = 0$ sunt $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

c) $D = (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty), f'(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+5}}, x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$. Soluțiile $x \in \varnothing$.

d) $D = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup (0, +\infty), f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x}, x \in D$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții.

e) $D = \mathrm{R}, f'(x) = (3x^2 - 6x) \cdot 3^{x^3 - 3x^2} \ln 3, x \in \mathrm{R}$. Soluțiile sunt $x \in \{0, 2\}$.

f) $D = \mathrm{R}, f'(x) = \frac{12x^2 - 6x}{1 + (4x^3 - 3x^2 + 1)^2}, x \in \mathrm{R}$. Soluțiile ecuației sunt $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

g) $D = \mathrm{R}, f'(x) = 2 \cdot e^{-x^2} + (2x+1)e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}(-4x^2 - 2x + 2)$. Soluțiile $x \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

h) $D = \left(-\frac{8}{3}, +\infty\right), f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+4}{3x+8}}} \cdot \left(\frac{x^2+4}{3x+8}\right)' = \frac{3x^2+16x-12}{2(3x+8)^2} \cdot \sqrt{\frac{3x+8}{x^2+4}}, x \in D$.

Soluțiile ecuației $f'(x)=0$ sunt date de ecuația $3x^2 + 16x - 12 = 0$. Rezultă că $x = \frac{2}{3} \in D$.

S3. *Soluții:*
a) Funcția f este strict crescătoare pe R ca sumă de funcții strict crescătoare pe R, deci este funcție injectivă.
Funcția f este continuă, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Din proprietatea lui Darboux rezultă că Im f = R, deci f este surjectivă. Aşadar f este bijectivă, deci inversabilă.
b) $\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(x_0)}$, unde $f(x_0) = 3$. Ecuația $x + 2^x = 3$ are soluția unică $x = 1$ (din monotonia lui f).
Se obține că $\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 + 2\ln 2}$.

S4. *Soluții:*
a) Funcia f este bijectivă. Într-adevăr, fiind strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ ea este injectivă.
Fiind continuă şi având: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, rezultă că mulțimea de valori a funcției este Im f = R, deci f este surjectivă.

b) $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(2)} = 2$

$\left(f^{-1}\right)'(e+2) = \frac{1}{f'(e+1)} = 1 + \frac{1}{e}$.

3.4 Derivate de ordinul doi

Exersare

E1. *Soluții:*

a) $D = \mathbb{R} = D_{f'}$. Se obține $f'(x) = 3x^2 + 1$ şi $f''(x) = (3x^2 + 1)' = 6x$.
În particular $f''(-1) = -6, f''(x) = 0$.

b) $D = \mathbb{R},\ f'(x) = e^x(x+1), x \in \mathbb{R},\ f''(x) = e^x(x+2),\ x \in \mathbb{R}$.
Se obține $f''(0) = 2,\ f''(1) = 3e$.

c) $D = \mathbb{R}, f'(x) = \cos x - \sin x, f''(x) = -\sin x - \cos x, x \in \mathbb{R}$ şi $f''(0) = -1, f''(\pi) = 1$.

d) $D = [0, +\infty),\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1,\ x \in (0, +\infty),\ f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, x > 0$.

e) $D = \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2},\ x \in \mathbb{R}$. Funcția f' este funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$, fiind obținută prin operații cu funcții derivabile pe $\mathbb{R}$. Aşadar *f* este de două ori derivabilă în x_0.

f) $D = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\},\ f'(x) = \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2},\ x \in D$.
Funcția *f’* este derivabilă pe *D*, (operații cu funcții derivabile).

g) $D = \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2},\ x \in \mathbb{R}$. Funcția este de două ori derivabilă.

E2. *Soluții:*

a) Avem: $f(0-0) = 0 = f(0+0)$ deci *f* este continuă în *x*=0. De asemenea,
$f_s'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$ şi $f_d'(0) = 0$ deci *f* este derivabilă în x_0=0.

Obținem $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, x \le 0 \\ 20x^3, x > 0 \end{cases}$ şi rezultă că: $f_s''(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{3x^2}{x} = 0, f_d''(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{20x^3}{x} = 0$, deci *f* este de două ori derivabilă în x_0=0.

b) Avem că *f* este continuă şi derivabilă în x_0=0 şi $f'(x) = \begin{cases} \cos x, x \le 0 \\ 3x^2 + 1, x > 0 \end{cases}$.

Funcția *f’* este şi ea derivabilă în x_0=0, avînd $f''(0) = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} -x^4, x \le 0 \\ x^4, \quad x > 0 \end{cases}, f'(x) = \begin{cases} -4x^3, x \le 0 \\ 4x^3, \quad x > 0 \end{cases}, f''(0) = 0$.

d) Funcția *f* este continuă şi derivabilă pe (0,+∞) şi $f'(x) = \begin{cases} x^2(3\ln x + 1), x > 0 \\ 3x^2, \qquad\qquad x \le 0 \end{cases}$. Se obține apoi că $f''(0) = 0$.

E3. *Soluții:*

a) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=4x+5,\ x\in\mathbb{R},\ f''(x)=4, x\in\mathbb{R}$.

b) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=3x^2-4,\ x\in\mathbb{R}, f''(x)=6x,\ x\in\mathbb{R}$.

c) $D=\mathbb{R}, f'(x)=e^x+1,\ x\in\mathbb{R}, f''(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$.

d) $D=(0,+\infty), f'(x)=1+\dfrac{1}{x}, x>0, f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}, x>0$.

e) $D=(0,+\infty), f'(x)=\ln x+1, x\in(0,+\infty), f''(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$.

f) $D=\mathbb{R}, f'(x)=e^x(x^2+2x), x\in\mathbb{R}, f''(x)=e^x(x^2+4x+2), x\in\mathbb{R}$.

g) $D=(0,+\infty), f'(x)=2x\ln x+x, x\in(0,+\infty), f''(x)=2\ln x+3, x\in(0,+\infty)$.

h) $D=\mathbb{R}, f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x, x\in\mathbb{R}, f''(x)=2\cos 2x, x\in\mathbb{R}$.

i) $D=\mathbb{R}, f'(x)=-3\cos^2 x\sin x, x\in\mathbb{R}, f''(x)=6\sin^2 x\cos x-3\cos^3 x, x\in\mathbb{R}$.

j) $D=\mathbb{R}, f'(x)=x\cos x, x\in\mathbb{R}, f''(x)=\cos x-x\sin x, x\in\mathbb{R}$.

k) $D=(0,+\infty), f'(x)=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}, x\in(0,+\infty), f''(x)=\dfrac{15}{4}\sqrt{x}, x\in(0,+\infty)$.

l) $D=\mathbb{R}-\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in Z\right\} f'(x)=\operatorname{tg}x+\dfrac{x}{\cos^2 x}$,

$$f''(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x+x\sin 2x}{\cos^4 x}, x\in D.$$

m) $D=\mathbb{R}-\{-2\}, f'(x)=\dfrac{3}{(x+2)^2}, f''(x)=\dfrac{-6}{(x+2)^3}, x\in D$.

n) $D=\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}, x\in\mathbb{R}$.

Sinteză

S1. *Soluție:*

Folosim formulele trigonometrice:

- $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$,
- $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$

a) Avem • $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}\cos x=\cos x$ şi

• $\sin(x+\pi)=\sin x\cos\pi+\sin\pi\cos x=-\sin x$.

Aşadar $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right), f''(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)$.

b) Se arată că au loc relațiile: $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ şi $\cos(x+\pi)=-\cos x$.

S2. *Soluție:*
Avem $f'(x)=e^{2x}(8x+10), f''(x)=e^{2x}(16x+28), x\in \mathbb{R}$ şi relația este verificată.

S3. *Soluție:*
Avem $f'(x)=e^{x}(\sin x+\cos x), f''(x)=e^{x}2\cos x, x\in \mathbb{R}$.
Înlocuind în relația dată se obține că $e^{x}\cdot\cos x\cdot(2-a)=0, \forall x\in \mathbb{R}$, deci a=2.

S4. *Soluție:*
Avem $f'(x)=e^{-2x}(-3\sin x-\cos x)$ şi $f''(x)=e^{-2x}(7\sin x-\cos x), x\in \mathbb{R}$. Înlocuind în relația dată rezultă că $e^{-2x}\left[(9+ab-3(a+b))\sin x+(ab-a-b-1)\cos x\right]=0, x\in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 0$ se obține $ab - (a + b) = 1$, iar pentru $x=\frac{\pi}{2}$ se obține $ab - 3(a + b) = -9$.

Sistemul $\begin{cases} ab-(a+b)=1 \\ ab-3(a+b)=-9 \end{cases}$ conduce la $\begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases}$ cu soluțiile a=2, b=3, şi a=3, b=2.

S5. *Soluție:*
Obținem $f'(x)=2ax+b, f''(x)=2a, x\in \mathbb{R}$ şi $4a + 2b + c = 9$, $2a + b = 2$, $2a = 8$.
Aşadar $a = 4$, $b = -6$, $c = 5$ şi $f(x)=4x^2-6x+5$.

S6. *Soluție:*
Avem $f'(x)=3ax^2+2bx+c, f''(x)=6ax+2b, x\in \mathbb{R}$ şi se obține sistemul

$$\begin{cases} -a+b-c+1=-6 \\ 3a+2b+c=-3 \\ 12a+2b=4 \end{cases}$$

cu soluția $a = 1$, $b = -4$, $c = 2$, iar $f(x)=x^3-4x^2+2x+1$.

S7. *Soluție:*
Se pune condiția ca funcțiile să fie continue, derivabile în x_0 şi ca $f_s'(x_0)=f_d'(x_0)$.
a) $f(0-0)=0, f(0+0)=c$, deci f este continuă dacă $c = 0$.

- $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^3+ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+a)=a$,
- $f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^3+bx^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+bx)=0$,

deci f este derivabilă în $x_0 = 0$ pentru $a = 0$.

Se obține $f(x)=\begin{cases} x^3, x\le 0 \\ x^3+bx^2, x>0 \end{cases}, f'(x)=\begin{cases} 3x^2, x\le 0 \\ 3x^2+2bx, x>0 \end{cases}$.

- $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3x=0$ şi

- $f_d'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+2bx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(3x+2b)=2b$.

Rezultă că $2b = 0$ deci $b = 0$.
Aşadar f este de două ori derivabilă în $x_0 = 0$ dacă $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ şi deci $f(x)=x^3$.

c) $f(\pi-0)=-b,\ f(\pi+0)=\pi^2$, deci f este continuă pentru $b=-\pi^2$.

$f_s'(\pi)=-a,\ f_d'(\pi)=2\pi$, deci f este derivabilă în $x_0=\pi$ dacă $a=-2\pi$.

Avem: $f(x)=\begin{cases}-2\pi\sin x-\pi^2\cos x, x\le\pi,\\ c\sin^2 x+x^2, x>\pi\end{cases}$ şi $f'(x)=\begin{cases}-2\pi\cos x+\pi^2\sin x, x\le\pi,\\ 2c\sin x\cos x+2x, x>\pi\end{cases}$.

Se obţine:

- $f_s''(\pi)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}\dfrac{-2\pi\cos x+\pi^2\sin x-2\pi}{x-\pi}=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}\left(\dfrac{\pi^2\sin(x-\pi)}{x-\pi}-2\pi\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}\right)=$

$$=-2\pi\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{x-\pi}=-4\pi\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}{2\left(\frac{x-\pi}{2}\right)}=\pi^2.$$

- $f_d''(\pi)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x>\pi}}\dfrac{2c\sin x\cos x+2x-2\pi}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{2(x-\pi)}{x-\pi}+c\dfrac{\sin 2x}{x-\pi}\right)=$

$$=2+c\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2x-2\pi)}{x-\pi}=2+2c.$$

Rezultă că trebuie ca $2+2c=\pi^2$ deci $2c=-2+\pi^2, c=\dfrac{\pi^2-2}{2}$.

Aşadar $a=-2\pi, b=-\pi^2, c=-1+\dfrac{\pi^2}{2}$.

b) $f(2-0)=a+13,\ f(2+0)=4a+b+c$, deci f continuă dacă $3a + b + c = 13$.

$f_s'(2)=15,\ f_d'(2)=4a+b$, deci f este derivabilă dacă $4a + b = 15$.

Rezultă că $f'(x)=\begin{cases}3x^2+3, x\le 2\\ 2ax+b \le, x>2\end{cases}$.

Se obţine că

- $f_s''(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{3x^2+3-15}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}3(x+2)=12$ şi

- $f_d''(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2ax+b-15}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2ax+b-4a-b}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2a(x-2)}{x-2}=2a$.

Rezultă că $2a = 12$ şi $a = 6$, apoi $b = -9$.

d) $f(0-0)=b, f(0+0)=b, f(0)=3$, deci f este continuă pentru $b = 3$.

$f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{2x^2+cx+8x+3-3}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x(2x^2+cx+8)}{x}=8$,

$f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2 + ax + 3 - 3}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x + a = a$, deci f este derivabilă pentru $a = 8$.

Se obține: $f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 2cx + 8, x \le 0 \\ 2x + 8, x > 0 \end{cases}$.

Avem: $f_s''(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{6x^2 + 2c + 8 - 8}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(6x + 2c) = 2c$ şi $f_d''(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{2x + 8 - 8}{x} = 2$.

Rezultă că $2c = 2$ deci $c = 1$.

3.5 Regulile lui L'Hôspital

Exersare

E1. *Soluții:*

Cazuri $\frac{0}{0}$

a) $\ell = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-3x+2)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{2x} = \frac{0}{2} = 0$;

b) $\ell = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)'}{(x^3-8)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{3x^2} = \frac{1}{3}$;

c) $\ell = \lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{2x+4} = \frac{3}{2}$;

d) $\ell = \lim_{x\to 1} \frac{2006\cdot x^{2005}}{2007\cdot x^{2006}} = \frac{2006}{2007}$;

e) $\ell = \lim_{x\to 3} \frac{3x^2}{2x-4} = \frac{27}{2}$;

f) $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{2x+\cos x} = \frac{2}{1} = 2$;

g) $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\sin x+\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \frac{1}{2}$;

h) $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 24\cos 8x}{7\cos 7x - 2\cos 2x} = \frac{25}{5} = 5$.

E2. *Soluții:*

Cazuri de nedeterminare $\frac{0}{0}$

a) $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{2x+2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x+\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{2+2\cos 2x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

b) $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{\cos} = 9$.

c) $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$.

d) $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}2x+\sin x}{2x+1} = 0$.

e) $\ell = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2e^x-2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x^x-2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2e^x} = \frac{1}{2}$.

f) $\ell = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{n(n+2)(n+1)x^n - n(n+1)^2x^{n-1}}{2} =$

$= \frac{n(n+1)(n+2)-n(n+1)^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

E3. *Soluții:*

Cazuri de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

a) $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+4}{3x^2+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{6x} = 2$.

b) $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-1+\frac{1}{x}}{4x+1-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-x+1}{4x^2+x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-1}{8x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

c) $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\cdot 2}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{\sin 2x}\cdot\frac{\cos 2x}{\cos x}\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos 2x} = \frac{2}{2} = 1$.

d) $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{\sin^2 3x}} = -\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x} = 0$.

e) $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}}{\frac{\cos x}{1+\sin x}} = 2$.

f) $\ell = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1} = 0$

E4. *Soluții:*

Cazuri de nedeterminare $0\cdot\infty$.

a) $l = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x-\ln(x+1)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x(x+1)} = -\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = -1$.

b) $l = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\mathrm{tg}x} = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)} = 1$.

c) $l = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x-\ln(x^2+1)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1-x^2)x^2}{x(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x^2-1)}{x^2+1} = 0$

d) $l = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\arcsin x}{x}(x\ln x)\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$.

e) $l=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x}}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\right)'}{\left(-\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=0$.

f) $l=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{e^{\frac{1}{x+2}}}{\frac{1}{x+2}}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{e^{\frac{1}{x+2}}\left(\frac{1}{x+2}\right)'}{\left(\frac{1}{x+2}\right)'}=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}e^{\frac{1}{x+2}}=e^{\infty}=+\infty$

Teste de evaluare

Testul 1

Soluții

1. Tangenta la graficul funcției *f* în punctul $(x_0, f(x_0))$ are ecuația $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Aceasta trece prin $M(2,1)$ dacă $1-f(x_0)=f'(x_0)(2-x_0)$. Deoarece $f(x_0)=f(1)=a+2$ şi $f'(x_0)=f'(1)=a+3$ se obține că: $1-(a+2)=(a+3)\cdot 1$ de unde $a=-2$.

2. $f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=1, f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$, deci *f* este derivabilă în x_0=0.

3.

a) $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}, f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2}, x\in(0,+\infty)$.

b) $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1-2x}{x^2+1}, f''(x)=\frac{-2(x^2+1)-(1-2x)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-2x-2}{(x^2+1)^2}, x\in R$.

Testul 2

Soluții

1. Funcția este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0\}$. Studiem continuitatea și derivabilitatea în x_0=0.

Avem: $f(0+0)=0, f(0-0)=a^2-1$. Funcția este continuă în x_0=0 dacă a^2–1=0, deci dacă $a\in\{-1,1\}$.

Pentru $a=\pm 1, f_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\pm x^2}{x}=0,\ f_d'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\sin x}{x}=0$, deci f este derivabilă în x_0=0.

Așadar

Pentru $a\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, f nu este continuă în x_0=0, iar f este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0\}$.

Pentru $a\in\{-1,1\}$, f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+x+2)-(x^2-x+2)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{2x^2-4}{(x^2+x+2)^2}, x\in\mathbb{R}$.

b) $D=\mathbb{R}, f'(x)=\sqrt{x^2+x+2}+x\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{2(x^2+x+2)+2x^2+x}{2\sqrt{x^2+x+2}}=$

$$=\frac{4x^2+3x+4}{2\sqrt{x^2+x+2}}, x\in\mathbb{R}.$$

3. a) Caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui L'Hôspital.

$$\ell=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1;$$

b) Caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$. Se obține:

$$\ell=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x+1}}{3+\dfrac{2}{2x+1}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

Capitolul IV. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor

4.1. Rolul derivatei întâi în studiul funcţiilor

Exersare

E1. *Soluţie:*

Se verifică continuitatea şi derivabilitatea funcţiei *f* pe intervalul [*a*, *b*], respectiv (*a*, *b*).

a) Funcţia este restricţia unei funcţii de gradul 2 pe [–3,2], deci este continuă şi derivabilă. Aşadar se poate aplica teorema lui Lagrange.

Avem că $\exists c \in (-3,2)$ astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(2)-f(-3)}{5}$, adică :

$$4c-3=\frac{2-27}{5} \text{ de unde } c=-\frac{1}{2}.$$

b) Funcţia este continuă şi derivabilă pe [1, *e*] şi se poate aplica teorema lui Lagrange.

Rezultă că există $c\in(1,e)$ cu $f'(c)=\dfrac{\ln e-\ln 1}{e-1}$ sau $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{e-1}$ deci $c=e-1\in(1,e)$.

c) Se poate aplica teorema lui Lagrange funcţiei *f*.

Se obţine că $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{1}{3}$.

Dar $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ deci $\dfrac{2}{(c+1)^2}=\dfrac{1}{3}$ de unde $c=\sqrt{6}-1$.

d) Funcţia *f* nu este derivabilă în $x_0=\dfrac{1}{2}$, deci nu se poate aplica teorema lui Lagrange.

E2. *Soluţie:*

Funcţiile sunt derivabile pe domeniul de definiţie. Se studiază semnul primei derivate.

a) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=2x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Alcătuim tabelul de semn şi de monotonie pentru *f*.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	− − − − −	−	0	+	+ + + + +
$f(x)$		↘		↗	

b) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=3-3x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Tabelul de monotonie:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	− − − −		0	+ + + +	0	− − − −	
$f(x)$		↘		↗		↘	

c) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=4x^3-16x$, $x\in\mathbb{R}$. Soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$ sunt $x\in\{0,-2,2\}$.

Rezultă tabelul:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	− − − −		0	+ + +	0	− − −	0	+ + + +	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

d) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=(x+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Avem tabelul de monotonie:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	− − − − −	−	0	+	+ + + + +
$f(x)$		↘		↗	

e) $D=(0,+\infty)$, $f'(x)=\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$. Ecuația $f'(x)=0$ este ln x = -1, cu soluția $x=e^{-1}$. Tabelul de monotonie:

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - -$	$-$	0	$+$	$+ + + + +$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

f) $D=(0,+\infty)$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x\text{ - }1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. Rezultă tabelul:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - -$	$-$	0	$+$	$+ + + + +$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

g) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$, $x\in D$.

Tabelul de monotonie:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + + + +$	$+$	$\vert$	$+$	$+ + + + +$
$f(x)$		$\nearrow$	$\vert$	$\nearrow$	

Funcția *f* este crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty,\,1)$ și $(-1,\,+\infty)$.

h) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Rezultă tabelul:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - -$	$-$	0	$+$	$+ + + + +$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

E3. *Soluție*

Se alcătuieşte tabelul de semn al primei derivate şi de monotonie pentru funcția *f*.

a) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2-6x$, $x\in\mathbb{R}$.

Avem tabelul:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + +$	0	$- - -$	0	$+ + + +$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

Punctul $x=-\sqrt{2}$ este punct de maxim local, iar $x=\sqrt{2}$ este punct de minim local.

b) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Rezultă tabelul:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$- - -$	$-$	0	$+$	$+ + + +$
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Punctul $x=0$ este punct de minim.

c) $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$, $x\in D$.

Rezultă tabelul:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- -$	$\vert$	$- - -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Rezultă că $x=-1$ este punct de maxim local, iar $x=3$ este punct de minim local.

d) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Se obține tabelul:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - -$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	

Rezultă că $x=-2$ este punct de minim local, iar $x=0$ este punct de maxim local.

e) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Se obține tabelul:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- - -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Aşadar, $x=-1$ este punct de maxim local, iar $x=1$ este punct de minim local.

f) $D=(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$, $x\in D$.

Avem tabelul:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$- - -$	$\vert$	$- - -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$		$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Punctul $x=e$ este punct de minim local.

g) $D=\mathbb{R}$, $f'(x)=(-x^2+3x-2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Avem tabelul:

x	$-\infty$		$+1$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - -$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	

h) $D=[1,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.

Se obține tabelul:

x	1			$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	$+ + + + + + + + +$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	

Punctul $x=1$ este de minim relativ.

S1. *Soluție:*

a) Se pune condiția ca funcția f să fie continuă şi derivabilă în $x = 0$. Avem:

- $f(1-0)=1+a,\ f(1+a)=5+b$, deci este necesar ca $a=4+b$.
- $f_s'(1)=2+a,\ f_d'(1)=5+2b$. Se pune condiția ca $2+a=5+2b$.

Rezultă sistemul: $\begin{cases} a=4+b \\ a=3+2b \end{cases}$, cu soluția $a = 5$, $b = 1$.

b) Se pune condiția ca funcția f să fie continuă şi derivabilă în $x_0=\pi$.

- $f(\pi-0)=a,\ f(\pi+0)=-a+b\pi$, deci rezultă că $2a=b\pi$.
- $f_s'(\pi)=-1,\ f_d'(\pi)=b.$ Aşadar, $b=-1$ şi $a=-\frac{\pi}{2}$.

S2. *Soluții*

a) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2},\ x\in D$.

Se obține tabelul de monotonie:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + +		0	− −	|	− − −	0	+ + + +	
$f(x)$		↗	M	↘	|	↘	m	↗	

Funcția este monoton crescătoare pe intervalele $(-\infty,-3)$ şi $(1,+\infty)$, descrescătoare pe intervalele $(-3,-1)$ şi $(-1,1)$, $x=-3$ este punct de maxim local, iar $x=1$ este punct de minim local.

b) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{-2x^5+8x}{(x^4+4)^2}=\dfrac{-2x(x^4-2)}{(x^4+4)^2},\ x\in\mathbb{R}$.

Rezultă tabelul:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\sqrt{2}}$		0		$\sqrt{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + +		0	− − − −	0	+ + +	0	− − − −	
$f(x)$		↗	M	↘	m	↗	M	↘	

c) $D=(0,+\infty),\ f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1),\ x\in(0,+\infty)$.

Se obține tabelul:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	− − − −		0	+ + + + +	
$f(x)$		↘	m	↗	

d) $D=[1,+\infty),\ f'(x)=\sqrt{x-1}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}},\ x\in(1,+\infty)$.

Se obține tabelul:

x	1			$+\infty$
$f'(x)$	| + + + + + + + + +			
$f(x)$	0	↗	↗	

Punctul $x=1$ este punct de minim local.

e) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ conduce la $\sqrt{x^2+1} = 2x$, cu soluția $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Se obține tabelul:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- - - - -$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

f) $D = (0, +\infty)$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{2(x^2+1)} = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{2x(x^2+1)} + 2$, $x \in (0, +\infty)$.

Se obține tabelul:

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- - -$	0	$+ + + +$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	

g) $D =$, $f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{3\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}} = \dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

Se obține tabelul de monotonie:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	|	$+ + + +$	0	$- - - -$	|	$- - - -$	0	$+ + +$	|	$+ + + +$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	M	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$		$\nearrow$	

h) $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{x}{\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezultă tabelul de monotonie:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	0	$+ + + + +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

i) $D = [-1, 1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2} \cdot \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}\left[1+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\right]^2}$, $x \in [-1, 1]$.

Se obține tabelul de monotonie:

x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f'(x)$		$+ + + +$	0	$- - - - -$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$

Punctele $x = -1$, $x = 1$ sunt puncte de minim local, iar $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de maxim local.

j) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ \dfrac{2}{x^2+1}, & x\in(-1,\,1) \end{cases}.$

Se obține tabelul de monotonie:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	$\vert$	$+ + + +$	$\vert$	$- - - -$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	

S3. *Soluție*

a) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=3x^2+m,\ x\in\mathbb{R}$. Funcția este monotonă pe $\mathbb{R}$ dacă $f'(x)$ are semn constant pe $\mathbb{R}$. Cum f' este funcție de gradul 2, punem condiția $\Delta\le 0$ și se obține $m\in[0,+\infty)$.

b) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=(2x)e^{2x}+2(x^2+m)e^{2x}=2e^{2x}(x^2+x+m),\ x\in\mathbb{R}$.

Punem condiția ca $x^2+x+m\geqslant 0, \forall x\in\mathbb{R}$ și se obține că $\Delta=1-4m\le 0$, deci $m\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

c) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=6x^2+10mx+6,\ x\in\mathbb{R}$.

Condițiile $f'(x)\ge 0$ și $x\in\mathbb{R}$ conduc la $\Delta=100m^2-144\le 0$, de unde $m\in\left[-\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right]$.

d) $D=(0,+\infty), f'(x)=2x+1-\dfrac{m}{x}=\dfrac{2x^2+x-m}{x}, x\in(0,+\infty)$.

Este necesară condiția $2x^2+x-m\ge 0, \forall\, x\in(0,+\infty)$.

Avem că $m^2\le 2x^2+x, \forall x\in(0,+\infty)$, deci m este cel mult valoarea, minimă a expresiei $2x^2+x$ pe $(0,+\infty)$.

Se obține $m\le 0$, deci $m\in(-\infty,\ 0)$.

S4. *Soluție*

Se obține că $f'(x)=(2x+m)e^{2x}+2e^{2x}(x^2+mx+1)=(2x^2+2mx+2x+m+2)e^{2x},\ x\in\mathbb{R}$. Se pune condiția ca ecuația $f'(x)=0$, deci $2x^2+2mx+2x+m+2=0$ să aibă două soluții reale diferite. Rezultă că $\Delta=4(m+1)^2-8(m+2)>0$, cu soluția $m\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

S5. *Soluție*

Se obține $f'(x)=\dfrac{-(x^2-3x+2)-(m-x)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}=\dfrac{x^2-2mx+3m-2}{(x^2-3x+2)^2}, x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

Se impune condiția $x^2-2mx+3m-2\ne 0, \forall x\in D_f$.

Rezultă că $\Delta=4m^2-4(3m-2)<0$, cu soluția $m\in(1,2)$.

Pentru $x=1$ obținem $1^2-2m+3m-2=0\Rightarrow m=1$, iar pentru $x=2$ se obține $m=2$.

În concluzie, mulțimea valorilor lui m este $[1,2]$.

S6. *Soluție*

Avem: $f'(x)=\dfrac{(2x+2b)(x-a)-x^2-2bx-5}{(x-a)^2}=\dfrac{x^2-2ax-2ab-5}{(x-a)^2}$.

Punem condițiile: $f'(-1)=0$ şi $f'(3)=0$.

Se obține sistemul de ecuații: $\begin{cases} a-ab=2 \\ 3a+ab=2 \end{cases}$, deci $a = 1$, $b = -1$.

Se verifică apoi că funcția obținută $f(x)=\dfrac{x^2-2x-5}{x-1}$ verifică proprietățile cerute.

S7. *Soluție*

Punem condițiile $f(1)=1$, $f'(1)=0$ pentru ca $A(1, 1)$ să poată fi punct de extrem.

Avem: $f'(x)=3mx+2nx+p$ şi se obțin egalitățile $m + n + 2p = 1$, $3m + 2n + p = 0$ (1).

Panta tangentei la grafic în $B(0, p)$ este $m=f'(0)=\text{tg}\,45°=1$.

Se obține că $p = 1$. Din relațiile (1) va rezulta că $m = 1$, $n = -2$.

S8. *Soluție*

• Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală. Rezultă că $b = 1$.

• Dreapta $y = x + 4$ este asimptotă oblică.

Se obține $1=m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ şi $4=n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+1}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+1)x+1}{x-1}=a+1$, deci $a = 3$.

Funcția este $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

S9. *Soluție*

Fie $ABCD$ dreptunghiul înscris în cercul de centru O şi rază R.

Notăm x lungimea laturii AD, cu $x\in[0,2R]$. (fig. 1)

Rezultă că $AB=\sqrt{4R^2-x^2}$, deci perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este dat de relația $f(x)=2\left(x+\sqrt{4R^2-x^2}\right)$.

Se obține că:

$$f'(x)=2\left(1-\frac{x}{\sqrt{4R^2-x^2}}\right)=2\frac{\sqrt{4R^2-x^2}-x}{\sqrt{4R^2-x^2}},\ x\in[0,2R).$$

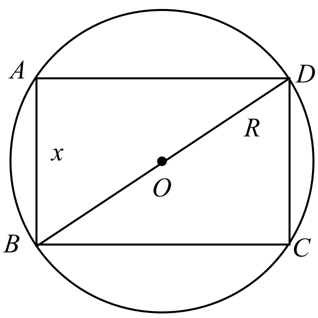


Figura 1

Determinăm punctele de extrem ale funcției f.

Avem tabelul:

x	0		$R\sqrt{2}$		$2R$
$f'(x)$	$+ + + +$		0	$- - - - -$	
$f(x)$	$4R$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$4R$

Rezultă că $x=R\sqrt{2}$ este punct de maxim şi se obține că $AB=R\sqrt{2}$, deci $ABCD$ este un pătrat.

S10. *Soluție*

Fie $ABCD$ un dreptunghi de arie S.

Notăm cu x lungimea laturii AD (fig. 2).

Obținem că $x\cdot AB=S$, deci $AB=\dfrac{S}{x}$,

iar perimetrul dreptunghiului este $f(x)=2\left(x+\dfrac{S}{x}\right)$, $x>0$.

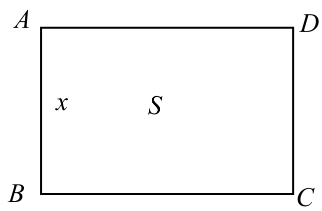


Figura 2

Avem $f'(x)=2\left(1-\frac{S}{x^2}\right)$ şi rezultă tabelul de monotonie:

x	0		$\sqrt{S}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -$		0	$+$	$+\ +\ +\ +$
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	∞

Rezultă că $x=\sqrt{S}$ este punci de minim şi $AB=\frac{S}{\sqrt{S}}=\sqrt{S}$.

Aşadar, patrulaterul *ABCD* este pătrat.

S11. *Soluție*

Fie *O* mijlocul bazei [*BC*] a triunghiului *ABC*.

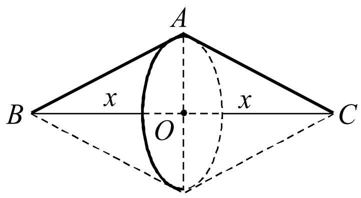


Figura 3

Notăm *x* = *OB*. Rezultă că $AB=\frac{3P-2x}{2}$.

Prin rotație în jurul bazei [*BC*] se obține un corp format din două conuri cu aceeaşi bază (fig. 3).

Înălțimea conului este *x*, iar raza sa este

$OA=\sqrt{AB^2-x^2}=\sqrt{\left(\frac{3P}{2}-x\right)^2-x^2}$.

Volumul corpului este $f(x)=2\cdot\frac{\pi Rh}{3}=\frac{2\pi}{3}OA\cdot x=\frac{2\pi}{3}x\cdot\sqrt{\left(\frac{3P}{2}-x\right)^2-x^2}$.

Aşadar $f'(x)=\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{9p^2}{4}-3Px}-\frac{3Px}{2\sqrt{\frac{9P^2}{4}-3Px}}\right)=\frac{\pi}{6}\frac{9P(P-2x)}{\sqrt{\frac{9P^2}{4}-3Px}}$.

Tabelul de monotonie este:

x	0		$\frac{P}{2}$		$\frac{3P}{2}$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +$		0	$-$	$-\ -\ -\ -$
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Punctul de maxim pentru *f*(*x*) este $x=\frac{P}{2}$ când *BC* = *P*, *AB* = *AC* = *P*, deci triunghiul *ABC* este echilateral.

S12. *Soluție*

a) Funcția *f* este derivabilă pe I_n, deci i se poate aplica teorema lui Lagrange.

b) Avem că există $c_n\in(n,n+1)$, cu proprietatea că $f'(c_n)=f(n+1)-f(n)$ şi se obține că:

$$\frac{1}{c_n}=\ln(n+1)-\ln n\text{, deci } c_n=\frac{1}{\ln(n+1)-\ln n}.$$

c) Deoarece $c_n\in(n,n+1)$ rezultă că $\frac{1}{c_n}\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ şi astfel $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{c_n}<\frac{1}{n}$ deci

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^* \qquad (1)$$

d) În relația (1) dăm lui n valori şi rezultă că avem:

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

....

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

Prin adunarea acestor inegalități obținem, după reduceri:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Aşadar $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \ln n$

4.2. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor

Exersare

E1. *Soluţie*

Se stabileşte semnul derivatei a doua a funcţiei *f*.

a) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=2x-3,\ f''(x)=2,\ x\in\mathbb{R}$.
Rezultă că funcţia *f* este convexă pe $\mathbb{R}$.

b) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=-6x+6,\ f''(x)=-6<0,\ x\in\mathbb{R}$.
Rezultă că funcţia *f* este concavă pe $\mathbb{R}$.

c) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=3x^2-12,\ f''(x)=6x,\ x\in\mathbb{R}$.

Tabelul de convexitate:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -$	$-$	0	$+$	$+\ +\ +\ +$
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

d) $D=\mathbb{R},\ f'(x)=6x-6x^2,\ f''(x)=6-12x,\ x\in\mathbb{R}$.
Se obţine tabelul:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$+\ +\ +\ +$	$+$	0	$-$	$-\ -\ -\ -$
$f(x)$		$\smile$		$\frown$	

e) $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}, f'(x)=\dfrac{3}{(x+3)^2}, f''(x)=\dfrac{-6}{(x+3)^3},\ x\in D$. Rezultă tabelul:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f''(x)$	$+\ +\ +\ +$	$+$	$\vert$	$-$	$-\ -\ -\ -$
$f(x)$		$\smile$	$\vert$	$\frown$	

f) $D=\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}, f''(x)=\dfrac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3},\ x\in\mathbb{R}$.

Rezultă tabelul:

x	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		0		$\sqrt{12}$		$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -$		0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

g) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}, f'(x)=\dfrac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}, f''(x)=\dfrac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3},\ x\in D$.

Se obţine tabelul:

x	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$+\ +\ +\ +$		$\vert$	$-\ -\ -$	0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	
$f(x)$		$\smile$		$\frown$		$\frown$		$\smile$	

h) $D=\mathbb{R}, f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}, f''(x)=(2-4x+x^2)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

Se obține tabelul:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+ + + +	0	− − − − − −	0	+ + + +	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

i) $D=(0,+\infty), f'(x)=\ln x+1, f''(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$.

Funcția este convexă pe D.

j) $D=\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+x^2, f''(x)=2x-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=2x\dfrac{(x^2+1)^2-1}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^3(x^2+2)}{(x^2+1)},\ x\in\mathbb{R}$

Se obține tabelul:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		− − − − −	0	+ + + + +	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	

E2. *Soluții*

a) $D=\mathbb{R}, f'(x)=3x^2, f''(x)=6x,\ x\in\mathbb{R}$. Avem tabelul:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		− − − − −	0	+ + + + +	
$f(x)$		$\cap$	i	$\cup$	

Punctul $x=0$ este punct de inflexiune.

b) $D=\mathbb{R}, f'(x)=4x^3-12x^2, f''(x)=12x^2-24x,\ x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+ + + +	0	− − − − − −	0	+ + + +	
$f(x)$		$\cup$	i	$\cap$	i	$\cup$	

Punctele de inflexiune sunt $x=0$ și $x=2$.

c) $D=\mathbb{R}, f'(x)=(-x^2+2x-1)e^{-x}, f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+3),\ x\in\mathbb{R}$. Se obține tabelul:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		+ + + +	0	− − − − − −	0	+ + + +	
$f(x)$		$\cup$	i	$\cap$	i	$\cup$	

d) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}, f''(x)=\dfrac{6x^2+2)}{(x^2-1)^3},\ x\in D$.

Rezultă tabelul:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		+ + + +	|	− − − − − −	|	+ + + +	
$f(x)$		$\cup$	|	$\cap$	|	$\cup$	

Funcția nu are puncte de inflexiune.

e) $D=\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}, f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, x\in\mathbb{R}$.

Se obține tabelul:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$		0	$+\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	
$f(x)$	$\cup$		i	$\cap$	i	$\cup$	

f) $D=\mathbb{R}, f'(x)=(1-2x^2)e^{-x^2}, f''(x)=e^{-x^2}(4x^3-6x), x\in\mathbb{R}$.

Se obține tabelul:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$
$f(x)$	$\cap$	i	$\cup$	i	$\cap$	i	$\cup$

g) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}, f'(x)=\dfrac{-1}{x^2+1}, f''(x)=\dfrac{2x)}{(x^2+1)^2}, x\in D$.

Se obține tabelul:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +$
$f(x)$	$\cup$	i	$\cap$

h) $D=\mathbb{R}, f'(x)=\sin 2x, f''(x)=2\cos 2x, x\in\mathbb{R}$.

Ecuația $f''(x)=0$, adică cos $2x$ = 0, are soluțiile $x\in\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$. Alcătuim tabelul de semn pentru a doua derivată:

x	$-\infty$	$-\frac{5\pi}{4}$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$	... $+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -$	0	$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +\ +$
$f(x)$	$\cap$	i	$\cup$	i	$\cap$	i	$\cup$	i	$\cap$	i	$\cup$	i	$\cap$	i	$\cup$

Punctele de inflexiune sunt $xk=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

E3. *Soluții*

a) Se obține $f'(x)=\begin{cases}2x-3, & x\le 1\\ 4x-5, & x>1\end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ 4, & x>1\end{cases}$. Rezultă că funcția este convexă pe fiecare din intervalele (–∞, 1) şi (1,). Nu există puncte de inflexiune.

b) Se obține $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1, & x<0\\ 1+\dfrac{2x}{x^2+1}, & x>0\end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases}6x, & x<0\\ \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, & x>0\end{cases}$.

Tabelul de semn pentru a doua derivată este:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	
$f(x)$	$\cap$		$\cup$	i	$\cap$	

Punct de inflexiune este $x=1$; punctul $x=0$ nu este de inflexiune deoarece f nu este continuă în $x_0=0$.

c) Se obține $f'(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & x\le 0\\ 2x+1, & x>0\end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & x\le 0\\ 2, & x>0\end{cases}$.

Tabelul de semn pentru $f''(x)$ este:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-\ -\ -\ \ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	$+\ +\ +\ +$	$+\ +$	
$f(x)$			i				

Sinteză

S1. *Soluții:*

a) $D=\mathbb{R}, f'(x)=4x^3-8x, f''(x)=12x^2-8,\ x\in\mathbb{R}$. Se obține tabelul de variație:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$		$\searrow$	m		$\nearrow$		M		$\searrow$		m	$\nearrow$	
$f''(x)$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$			0	$-\ -\ -$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$	
					i				i				

b) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}, f'(x)=\dfrac{-x^2-4x+8}{(x+2)^2}, f''(x)=\dfrac{-24}{(x+2)^3},\ x\in D$.

Se obține tabelul de variație:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{12}$		-2		$-2+\sqrt{12}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +$	|	$+\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	|	$\nearrow$	M	$\searrow$	
$f''(x)$		$+\ +\ +\ +\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	|		$-\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	

c). $D=[-1,1],\ f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ f''(x)=-\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$

Tabelul de variație:

x	-1		0		1
$f'(x)$	$(-\infty)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$(-\ \ )$
$f(x)$		$\searrow\ \ \searrow\ \ \searrow$	0	$\searrow\ \ \searrow\ \ \searrow$	
$f''(x)$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	
			i		

d) $D=\mathbb{R}, f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, f''(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$		$\nearrow\ \ \nearrow\ \ \nearrow\ \ \nearrow\ \ \nearrow$	
$f''(x)$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	

e) $D=\mathbb{R}, f'(x)=(x^2+x+1)e^x, f''(x)=e^x(x^3+3x+2),\ x\in\mathbb{R}$.
Rezultă tabelul de variație:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +	+	+ + + + +	+	+ + + + + +	
$f(x)$		↗ ↗		↗		↗ ↗ ↗	
$f''(x)$		+ + + + + + + + +	0	− − − − −	0	+ + + + + + + + +	
			i		i		

f) $D=(0,+\infty), f'(x)=x^2(3\ln x+1), f''(x)=x(6\ln x+5),\ x\in(0,+\infty)$.
Rezultă tabelul de variație:

x	0		$e^{-\frac{5}{6}}$		$e^{-\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		− − − − − − − −	−	− − − − − − − − − − − − − − −	0	+ + + + +	
$f(x)$			↘	↘ ↘ ↘	m	↗ ↗	
$f''(x)$		− − − − − − −	0	+ +	+	+ +	
			i				

S2. *Soluție*
a) Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.
Se obține: $f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x+a+b],\ f''(x)=e^x[x^2+(a+4)x+2a+b+2], x\in\mathbb{R}$.
Condițiile $f'(1)=0,\ f''(-2)=0$ conduc la sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}2a+b=-3\\ b=2\end{cases},\text{ cu soluția } a=-\frac{5}{2}, b=2.$$

Rezultă că $\quad f(x)=\frac{1}{2}(2x^2-5x+4)e^x,\qquad f'(x)=e^x\left(x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(2x^2-x-1)e^x,$

$$f''(x)=\frac{1}{2}(2x^2+3x-2)e^x,\ x\in\mathbb{R}.$$

b) Avem tabelul de variație:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+ + +	+ + +	+	0	− − −	−	− −	0	+ + + + + + +	
$f(x)$		↗	↗		M	↘	↘		m	↗	
$f''(x)$		+ + +	+		0	− − − −	0	+ + + + + + + + +			
			i				i				

S3. *Soluție*
Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.
Avem: $f'(x)=5x^4+3ax^2+85,\ f''(x)=20x^3+6ax, x\in\mathbb{R}$.
Condiția $f''(-3)=0$ conduce la $a=-30$.
Rezultă că $f'(x)=5x^4-90x^2+85,\ f''(x)=20x^3-180x, x\in\mathbb{R}$.
• Rezolvăm ecuația $f''(x)=0$.
Notând $x^2=y$ obținem $5y^2-90y+85=0$, de unde $y=1, y=17$ și se obține $x\in\left\{\pm1,\pm\sqrt{17}\right\}$.
• Rezolvăm ecuația $f''(x)=0$.
Se obține că $20x^3-180x=0$ sau $20x(x^2-9)=0$, cu soluțiile $x\in\{0,-3,3\}$.
Se obține tabelul de variație:

x	$-\infty$	$-\sqrt{17}$	-3	-1	0	1	3	$\sqrt{17}$	$+\infty$
$f'(x)$	+ + +	+ 0	− − −	− 0 +	+	+ 0 −	− −	0	+ + +
$f(x)$	↗	M	↘	m	↗	M	↘	m	↗
$f''(x)$	− − − − − −		0	+ +	0	− − − −	0	+ + + + +	
			i		i		i		

S4. *Soluție*

a) Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Se obține: $f'(x) = a + \dfrac{b}{x^2+1}, f''(x) = \dfrac{-2bx}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$.

Din condițiile date se obțin relațiile: $a + \dfrac{b}{2} = 2, \dfrac{2b}{4} = 1$, deci $b = 2$, $a = 1$.

b) Rezultă că $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2+1}, f''(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}, \ x \in \mathbb{R}$.

Rezultă tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +	+ +	+	+ + + +	+ +
$f(x)$	↗	↗	↗	↗ ↗	↗
$f''(x)$		+ + + + + +	0	− − − − − −	
			i		

S5. *Soluție*

a) Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Se obține: $f'(x) = \dfrac{a^2 - x^2}{(x^2+a^2)^2}, f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6a^2x}{(x^2+a^2)^3}, x \in \mathbb{R}$.

Ecuația $f''(x) = 0$ conduce la $2x^3 - 6a^2x = 0$, cu soluțiile $x \in \{0, \pm a\sqrt{3}\}$.

Ecuația tangentei la grafic în $x_0 = a\sqrt{3}$ este: $y - f(a\sqrt{3}) = f'(a\sqrt{3}) \cdot (x - a\sqrt{3})$.

Deoarece $f(a\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4a}, f'(a\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{8a^2}$, se obține ecuația tangentei:

$$y = -\frac{x}{8a^2} + \frac{3\sqrt{3}}{8a}.$$

Identificând cu ecuația dată $y = -x + \dfrac{3}{8}$ se obține că

$$\frac{3\sqrt{3}}{8a} = \frac{3}{8} \text{ și } \frac{1}{8a^2} = \frac{1}{24}, \text{ deci } a = \sqrt{3}.$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}, f'(x) = \dfrac{3 - x^2}{(x^2+3)^2}, f''(x) = \dfrac{2x^3 - 18x}{(x^2+3)^3}, x \in \mathbb{R}$.

Rezultă tabelul de variație:

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	− − − −	− −	− 0 +	+	+ 0 −	− − − −	− −
$f(x)$			m		M		
$f''(x)$	− − − − − −	0	+ +	0	− −	0	+ + + + +
		i		i		i	

4.3 Reprezentarea grafică a funcțiilor

Exersare

E1. *Soluție*

Funcțiile sunt de două ori derivabile pe D.

a) *Domeniul de definiție*: $D \in \mathbb{R}$.

Se obține că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Asimptote. Funcția este polinomială şi nu are asimptote.

Intersecția cu axele de coordonate

Ecuația $f(x) = 0$ este $x^3 - 3x = 0$ şi are soluțiile $x \in \{0, 3\}$.

Graficul intersectează Ox în $O(0, 0)$ şi $A(3, 0)$.

Studiul folosind derivatele

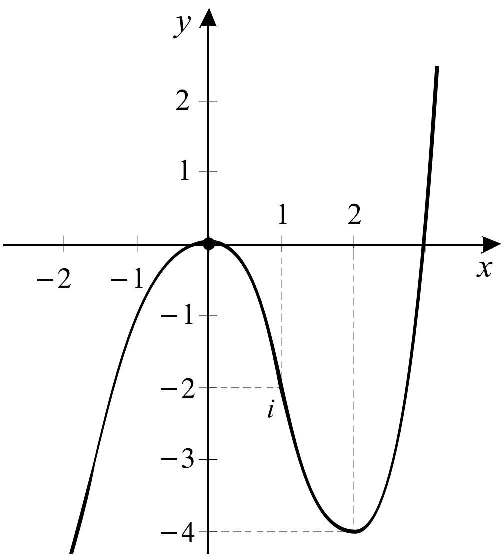
Se obține: $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 2\}$, iar $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	+ + +	+ +	0	− − −	− − −	− −	0	+ +	+ + +
$f(x)$	$-\infty$	↗	M (0)	↘	↘	↘	(− 4) m	↗	$+\infty$
$f''(x)$	− − −	− − −	−	− − −	0 $i(-2)$	+ +	+ + + +	+ +	

Graficul funcției:



b) $D \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

Intersecția cu axele: $A(0, 8)$ şi $B(2, 0)$.

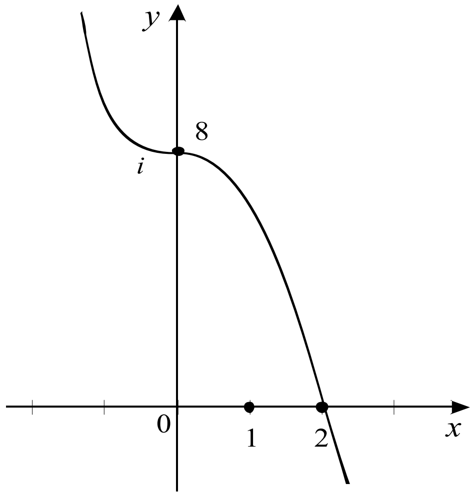
Studiul folosind derivatele

Avem: $f'(x) = -3x^2$, $f''(x) = -6x$, $x \in \mathbb{R}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$- \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$		0	$- \ - \ - \ - \ - \ -$	
$f(x)$	$\searrow \quad \searrow$	$\searrow$	8	$\searrow \quad \searrow$	$\searrow$
$f''(x)$	$+ + + + + + + + + +$		0	$- - - - - - - - - - - -$	
			$i(8)$		

Graficul funcției:



c) $D \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

Punctele de intersecție cu axele: $O(0, 0)$ și $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

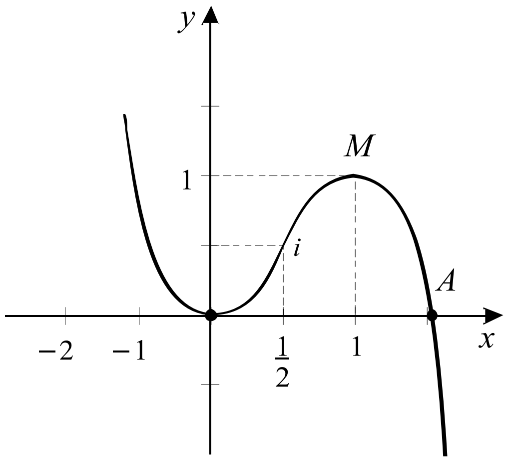
Studiul folosind derivatele

Avem: $f'(x) = -6x^2 + 6x$, $f''(x) = -12x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$- \ - \ - \ - \ -$		0	$+ \ +$	$+ \ +$	$+ \ +$	0	$- \ - \ - \ -$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	(0) m	$\nearrow$		$\nearrow$	M (1)	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$	$+ + + + + + + + + +$				0	$- - - - - - - -$			
					$i\left(\frac{1}{2}\right)$				

Graficul funcției:



d) $D \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Punctele de intersecție cu axele: $O(0, 0)$ şi $A(5, 0)$.

Studiul folosind derivatele

Avem: $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$, $f''(x) = 20x^3 - 60x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	$+\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	$-\ -$	$-\ -$	0	$+\ +\ +$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M (0)	$\searrow$		$\searrow$	-4^4 m	$\nearrow$	$-\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -$	0	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	0 i	$+\ +\ +\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +\ +$	

e) $D \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Intersecția cu axa Ox:

Ecuația $f(x) = 0$ se scrie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ sau $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$ şi are soluțiile $x \in \{-1, 1, -2, 2\}$.

Graficul intersectează axa Oy în punctul $A(0, 4)$.

Studiul folosind derivatele

Se obține: $f'(x) = 4x^3 - 10x$, $f''(x) = 12x^2 - 10$, $x \in \mathbb{R}$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x \in \left\{0, \pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$, iar

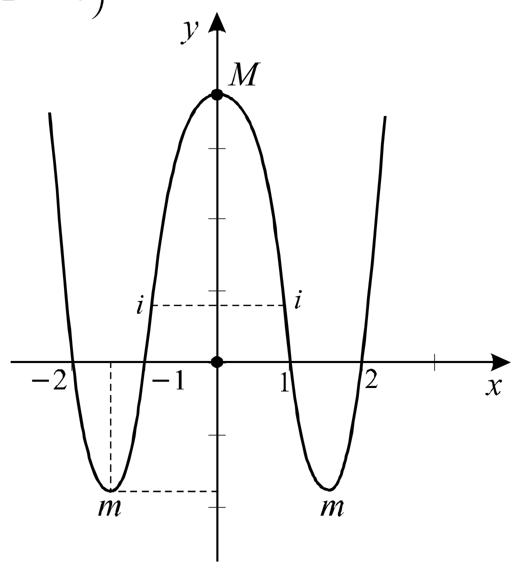
ecuația $f''(x) = 0$ are soluțiile $x = \pm\sqrt{\frac{10}{12}} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		$-\frac{\sqrt{30}}{6}$		0		$\frac{\sqrt{30}}{6}$		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\ -\ -\ -$	0	$+$	$+\ +\ +\ +$	$+\ +$	0	$-\ -$	$-\ -$	$-\ -$	0	$+\ +\ +$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$			M (4)	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+\ +\ +\ +\ +$	$+\ +$	$+\ +$	0 i	$-\ -\ -\ -\ -\ -$		$-$	0 i	$+\ +\ +$	$+\ +$	$+\ +\ +$	

Punctele de extrem sunt: $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{9}{4}\right), (0, 4)$ şi $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, iar cele de *inflexiune* sunt $\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{19}{36}\right), \left(\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{19}{36}\right)$.

Graficul funcției este simetric față de *Oy*.



f) $D \in \mathrm{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Intersecția cu axele de coordonate

Punctul $A(0, 5)$ este intersecția cu Oy.

Ecuația $f(x)=0$ se scrie $2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ sau

$2x^3 + 2x^2 - 5x^2 + 5 = 0 \Rightarrow 2x^2(x+1) - 5(x^2-1) \Rightarrow (x+1)(2x^2 - 5x + 5) = 0$, cu soluția $x = -1$.

Studiul folosind derivatele

$f'(x) = 6x^2 - 6x,\ f''(x) = 12x - 6,\ x \in \mathrm{R}$.

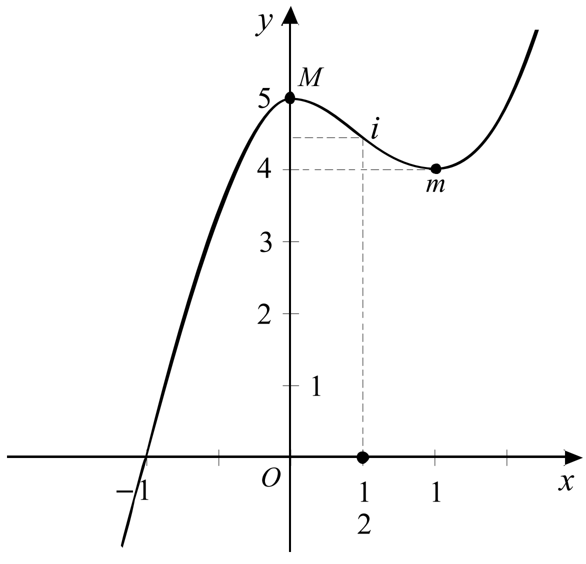
Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x \in \{0,1\}$, iar ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x = \frac{1}{2}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +		0	− − − − −	− −	−	0	+ + + + + + + + + + + + +	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	M	↘		↘	m	↗ ↗	$+\infty$
$f''(x)$	− − − − − − −	− − − −			0	+ + + + +		+ + + + + + + + + +	
					i				

Punctele de extrem sunt: (0, 5) şi (1, 4), iar cel de *inflexiune* $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Graficul funcției



s

g) $D \in \mathrm{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

Intersecția cu axele

Se obțin punctele $A(0, 16)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$.

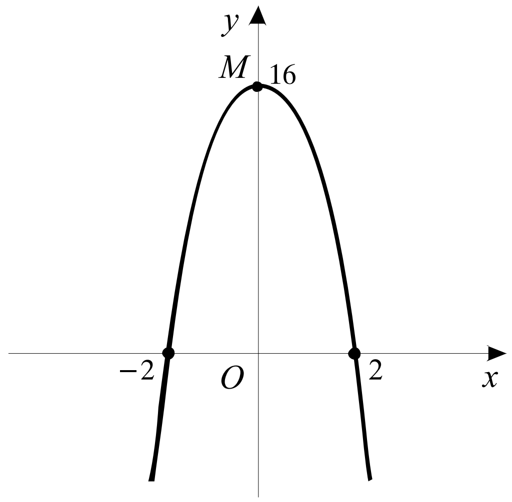
Funcția este pară, deci graficul este simetric față de Oy.

Studiul folosind derivatele: $f'(x) = -4x^3$, $f''(x) = -12x^2$, $x \in \mathrm{R}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + +	+ + + + + +	0	− − − −	− − − −	− −
$f(x)$	$-\infty$	↗ ↗	M (16)		↘ ↘	$-\infty$
$f''(x)$	− − − − − − −	− − − − − −	0	− − − − − − −	− − − − − − − −	

Graficul funcției



h) $D \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, funcția este pară.

Intersecția cu axele de coordonate $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$.

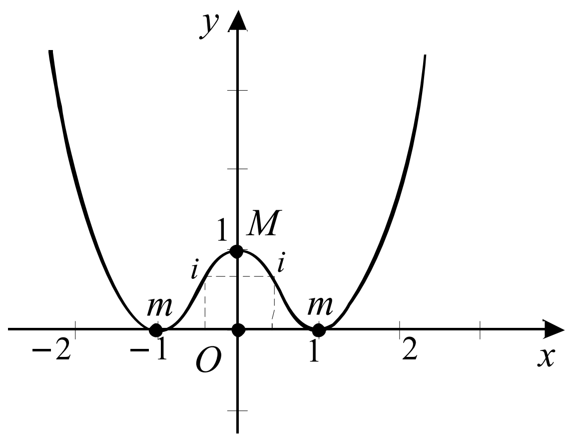
Studiul folosind derivatele

$f'(x) = 4x^3 - 4x$, $f''(x) = 12x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x \in \{-1, 0, 1\}$, iar ale ecuației $f''(x) = 0$ sunt $x \in \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		– – – –	0	+	+ + + +		+ 0 –	– –		– –	0	+ +	+ +
$f(x)$	$+\infty$	↘	m		↗		M	↘			m	↗	$+\infty$
$f''(x)$	+	+ + + + +		+ +	0	– –	– –		– –	– 0 +	+	+ + + + +	+
		∪			i		∩			i		∪	

Graficul funcției



Punctele de extrem sunt: $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1,0)$, iar cele de inflexiune: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right)$,$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9}\right)$.

i) $D \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Intersecția cu axele de coordonate $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 0)$.

Studiul folosind derivatele

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

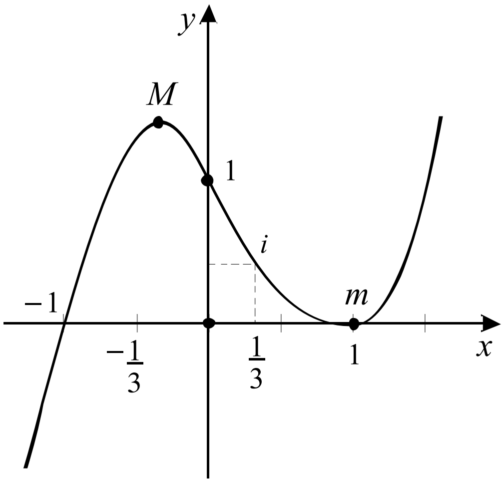
Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x \in \{0, 1\}$, iar ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x = \dfrac{1}{2}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + + +	0	− − − −		−	0	+ + + + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	↗ ↗	M	↘			m	↗ ↗	$+\infty$
$f''(x)$		− − − − − − − − − −			0		+ + + + + + + + + − − −		
					i				

Punctele de extrem sunt: $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{32}{27}\right)$, $(1, 0)$, iar cel de inflexiune $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$.

Graficul funcției



j) $D \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$.

Intersecția cu axele de coordonate $O(0, 0)$, $A(1, 0)$.

Studiul folosind derivatele

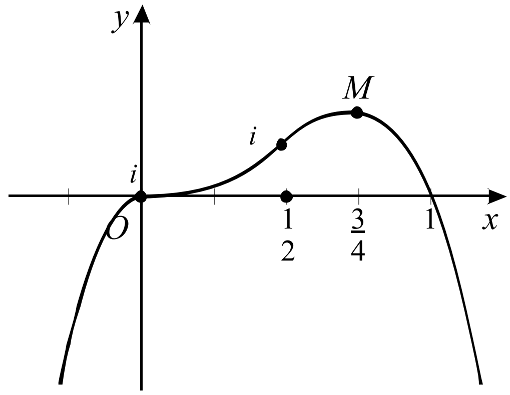
$f(x) = x^3 - x^4$, $f'(x) = 3x^2 - 4x^3$, $f''(x) = 6x - 12x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + + +	0	+ +	+ +	+	0	− − − − − − − − − − − −	
$f(x)$	$-\infty$	↗	↗		↗		M	↘ ↘ ↘	$-\infty$
$f''(x)$		− − − − − − − − −	0	+ +	0		− −	− − − − − − − − − − − −	
			i		i				

Punctele de extrem: $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{256}\right)$ iar de inflexiune (0, 0) şi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$.

Graficul funcției



k) $D \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

Intersecția cu axele de coordonate $O(0, 0)$, $A(1, 0)$.

Studiul folosind derivatele

$f'(x) = (1-x)^2(1-4x)$, $f''(x) = 2(x-1)(3-6x) = 6(x-1)(1-2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

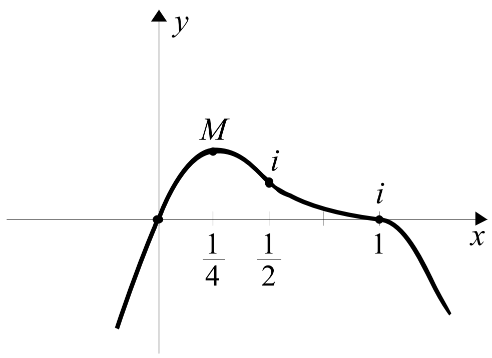
Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x \in \left\{1, \frac{1}{4}\right\}$, iar ale ecuației $f''(x) = 0$ sunt $x \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

Tabele de variație

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	+ + + + + + +	0	− −	−	−	0	− − −	
$f(x)$	$-\infty$	↗ ↗	M	↘		↘		↘	$-\infty$
$f''(x)$	−	− − − − − − − − − −	−	− −	0	+ +	0	− − − −	
					i		i		

Punctele de extrem: $\left(\frac{1}{4}, \frac{27}{256}\right)$ iar cele de inflexiune: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$, $(1, 0)$.

Graficul funcției:



E2. *Soluție*

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

Dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ şi la $-\infty$.

Asimptotele funcției

Avem $f(-1-0) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-2}{0_-} = +\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

Dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală bilaterală.

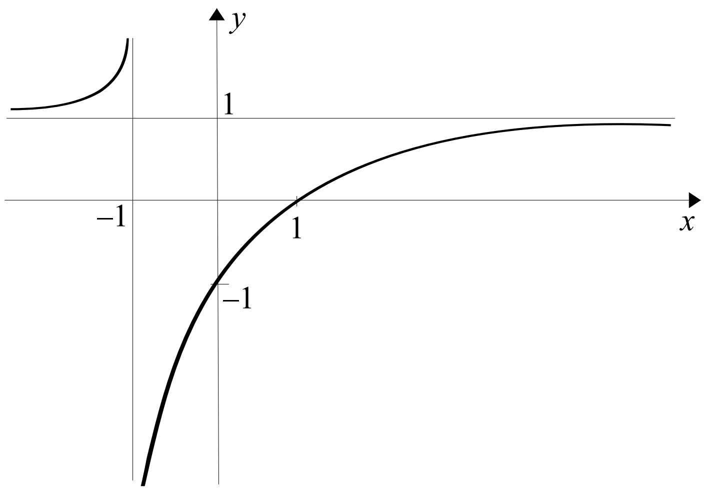
Intersecție cu axele: $A(0, -1)$, $B(1, 0)$

Studiul folosind derivatele $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^3}$, $x \in D$.

Tabelul de variație

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ \quad + \quad + \quad +$	|	$+ \quad + \quad + \quad + \quad +$	
$f(x)$	1	$\nearrow \quad \nearrow \quad +\infty$	|	$-\infty \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$	1
$f''(x)$		$+ \quad + \quad + \quad +$	|	$- \quad - \quad - \quad - \quad -$	

Graficul



c) $D = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Dreapta $y = 0$ este asimptotă la $-\infty$ şi la $+\infty$.

Studiul folosind derivatele

$f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x \in \{-1, 1\}$ iar $f''(x) = 0$ are soluțiile $x \in \{0, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

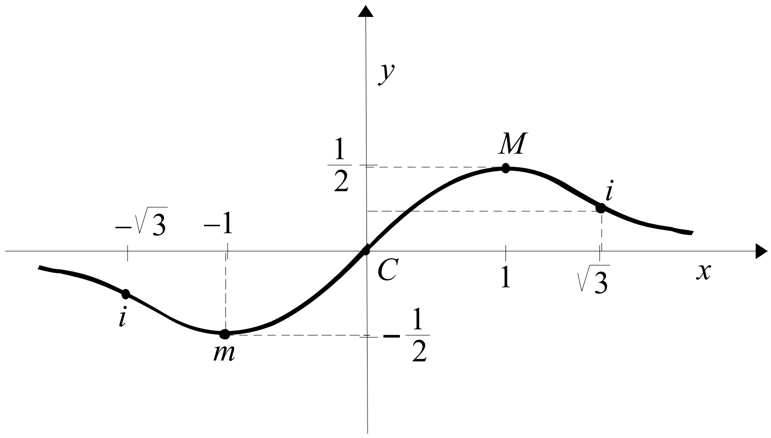
Tabelul de variație

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad -$	$-$	$- \quad -$	0	$+ \quad +$		$+$	0	$- \quad -$	$-$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	m	$\nearrow$		$\nearrow$	M	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	
$f''(x)$		$- \quad - \quad - \quad -$	0	$+ \quad + \quad +$		$+$	0	$- \quad - \quad - \quad -$			0	$+ \quad + \quad +$	
			i				i				i		

Punctele de *extrem* sunt $\left(-1, \frac{-1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)$

iar cele de *inflexiune*: $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), (0, 0), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Graficul funcției



Graficul funcției este simetric în raport cu punctul 0.

d) $D = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, deci $y = 1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi $+\infty$.

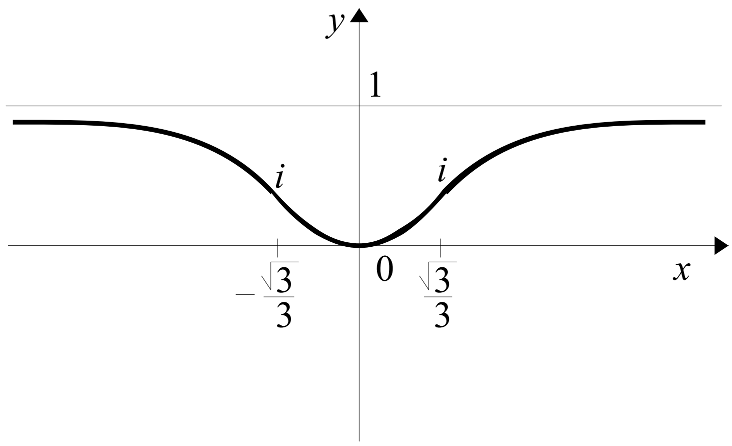
Studiul folosind derivatele:

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2},\ f''(x) = 2\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3},\ x \in \mathbb{R}.$$

Tabelul de variație

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\ -$	$-$	$-\ -$	0	$+\ +$	$+$	$+\ +\ +$	$+$
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{4}$	↘	0 m	↗	$\frac{1}{4}$	↗	1
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -$		0 i	$+\ +\ +\ +$			0 i	$-\ -\ -\ -\ -$	$-$

Graficul funcției



Graficul este simetric față de Oy, deoarece funcția f este pară.

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Rezultă că $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$.
Dreptele $x = -1$, $x = 1$ sunt asimptote verticale bilaterale.

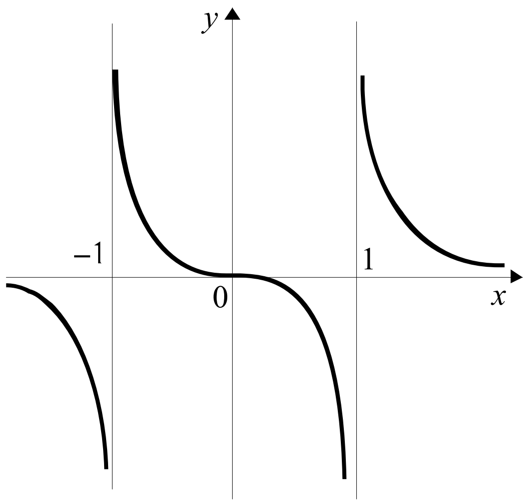
Studiul folosind derivatele

$$f'(x) = \frac{-1-3x^2}{(x^2-1)^2},\quad f''(x) = \frac{2x(x^2+5)}{(x^2-1)^3}, x \in D.$$

Tabelul de variație

x	$-\infty$		-1		0		1		$-\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -$		|	$-\ -\ -$		$-\ -\ -$	|	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow\ \ \searrow$	0
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -$		|	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	|	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	
					i				

Graficul funcției



f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Intersecțiile cu axele de coordonate: $O(0, 0)$

Asimptote

Dreptele $x = -1$, $x = 1$ sunt asimptote verticale

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1,\quad n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Rezultă că dreapta $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$.

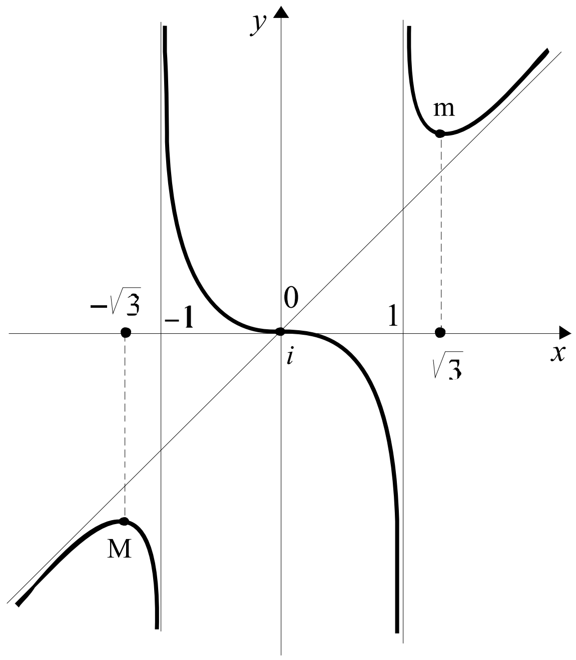
Studiul folosind derivatele

Avem $f'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}, x \in D$.

Tabelul de variație

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1	0	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\ +$	$+$	0	$-\ -$	| $-$	$-0-$	$-$ |	$-\ -$	0	$+\ +$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ M		$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\searrow$ | $+\infty$		$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ m	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul



E3. *Soluție:*

a) $D=[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

Intersecția cu axele $O(0, 0)$

Studiul folosind derivatele

$$f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}},\ x\in(0,+\infty).$$

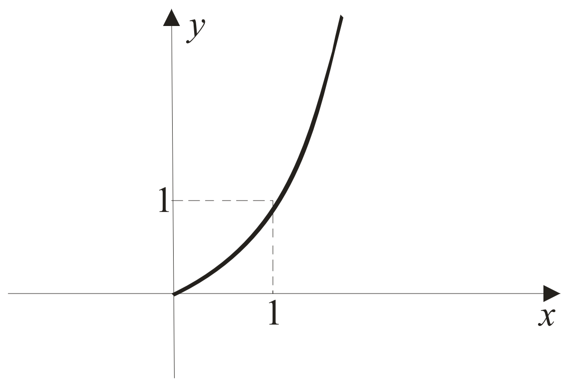
Funcția nu este de două ori derivabilă în $x = 0$ și $f''(0)=f''_d(0)=+\infty$.

Tabelul de variație

x	0									$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
$f(x)$	0	↗	↗	↗	↗	↗				$+\infty$
$f''(x)$	|	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Punctul $x = 0$ este punct de minim local.

Graficul



b) $D = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Punctul de intersecție cu axele $A(0, 1)$.

Asimptotele oblice:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1, \quad n = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

Dreapta $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

Analog $y = -x$ este asimptotă la $-\infty$.

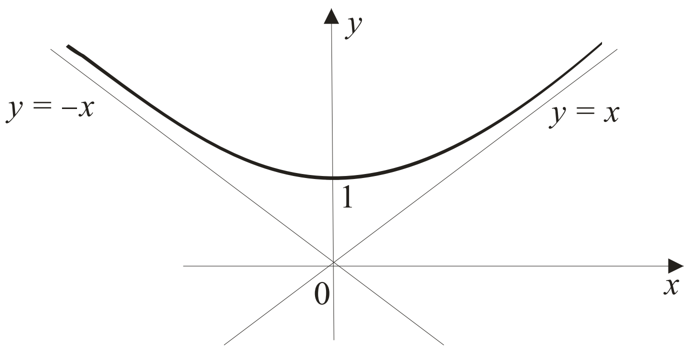
Studiul folosind derivatele

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \ f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$$

Tabelul de variație

x	$-\infty$						0					$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0 +	+	+	+	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$				(1) m	$\nearrow$	$\nearrow$			$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+			

Graficul



c) $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

Intersecțiile cu axele. $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$

Asimptote oblice

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = -1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0.$$

Rezultă că dreapta $y = -x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

Analog rezultă că $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

Studiul folosind derivatele

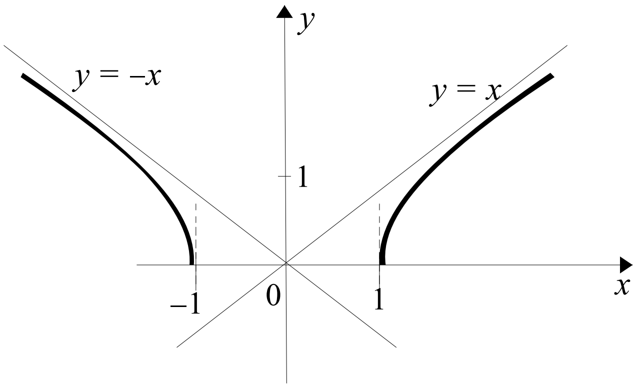
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \ f''(x) = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Se obține că $f_s'(-1) = -\infty$, $f_d'(1) = +\infty$.

Tabelul de variație

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$		$\vert$	//////	$\vert$	$+\ \ +\ \ +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow\ \ \searrow$	0	//////	0	$\nearrow\ \ \nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$		$\vert$	//////	$\vert$	$+\ \ +\ \ +$	

Punctele $x = -1$ şi $x = 1$ sunt puncte de minim.
În $x = -1$ şi $x = 1$ graficul este tangent dreptelor $x = -1$, respectiv $x = 1$.
Graficul



d) $D = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.
Studiul folosind derivatele

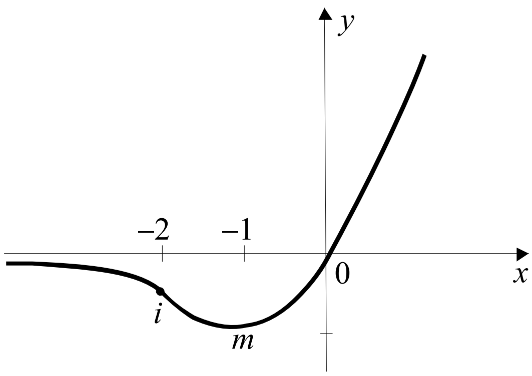
$$f'(x) = (x+1)e^x,\ f''(x) = (x+2)e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Tabelul de variație

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -$	$-\ -$		$-\ -$	0	$+\ \ +$	$+$	$+\ \ +\ \ +$	
$f(x)$	$0\ \searrow$	$\searrow$		$\searrow$	m	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$		0	$+\ \ +\ \ +$	$+$	$+\ \ +$	$+$	$+\ \ +\ \ +$	
			i						

Punctele de *extrem*: $\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$ şi de *inflexiune* $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

Graficul



f) $D=(0,+\infty), \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty, \ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$.

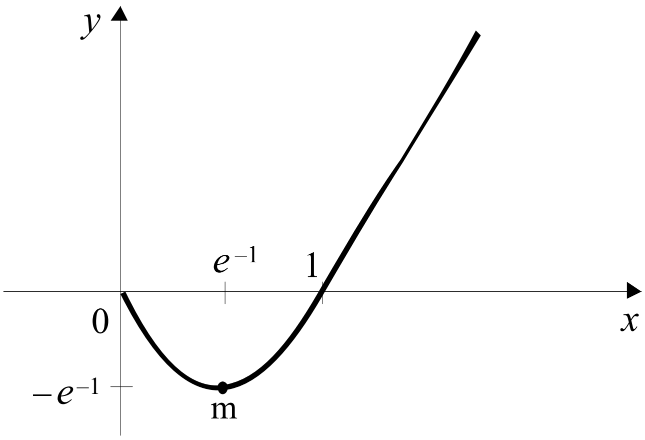
Intersecția cu axele A(1, 0)
Studiul folosind derivatele

$$f'(x)=\ln x+1, \ f''(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty).$$

Tabelul de variație

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	$-$ $-$ $-$	$-$ $-$	0	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $\searrow$	$-e^{-1}$ m	$\nearrow$ $\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$ $+$ $+$	$+$	$+$ $+$ $+$	$+$ $+$	

Graficul



Graficul este tangent axei *Oy* deoarece $f_d'(0)=-\infty$.

h) $D=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty), \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

Asimptote verticale

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln(x^2-1)=-\infty, \ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \ln(x^2-1)=-\infty$, deci dreptele $x = 1$, $x = -1$ sunt asimptote verticale

Studiul folosind derivatele

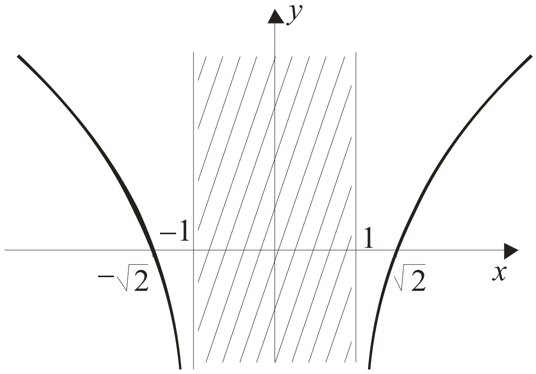
$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}, \ f''(x)=\frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2}, x\in D.$$

Tabelul de variație

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $-$ $-$ $-$ $-$	|		|	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $\searrow$	$-\infty$ |		| $-\infty$	$\nearrow$ $\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$ $-$ $-$ $-$ $-$	|		|	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$	

Intersecția cu axele: din $\ln(x^2-1)=0 \Rightarrow x^2-1=1$ cu soluțiile $x\in\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

Graficul



S2. *Soluție*

Obținem $1 = m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + ax}{x(x-1)}$ și

$$-1 = n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{ax+x}{x-1} = a+1.$$

Aşadar $a = -2$ şi $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

Intersecțiile cu axele de coordonate $O(0, 0)$, $A(2, 0)$

Dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală bilaterală.

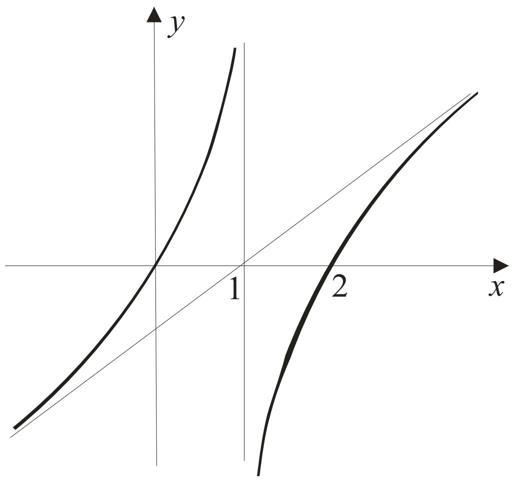
Studiul folosind derivatele

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2},\ x \in D,\quad f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^3},\ x \in D$$

Tabelul de variație

x	$-\infty$					1					$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+		| +	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↘	↘		$+\infty$	| $-\infty$	↗		↗		$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+	+		| −	−	−	−	−

Graficul



S3. *Soluție*

Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ şi se obține $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{(x+1)^2}$.

Condiția $f'(-3)=0$ conduce la $a=-3$, deci $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$, etc.

S4. *Soluție*

a) A doua bisectoare a sistemului de coordonate are ecuația $y=-x$, deci are panta $m=-1$. Rezultă că panta asimptotei oblice este $m=-1$. Se obține:

$$-1=m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3}{x(ax+a)}=\frac{1}{a}, \text{ deci } a=-1.$$

b) Funcția f este derivabilă pe D.

Se obține că $f'(x)=\dfrac{ax^2+bx-3a-12}{(ax+3)^2}, x\in D$.

Din condiție $f'(0)=0$, rezultă că $a=-4$, deci $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{3-4x}$.

S5. *Soluție*

Funcția f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.
Se obține $f'(x)=x^2+1-\cos x$, $f''(x)=2x+\sin x, x\in\mathbb{R}$.
Avem: $\lim\limits_{x\to-\infty} f''(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=+\infty$.
Notăm $g(x)=2x+\sin x$, $x\in\mathbb{R}$.
Se obține: $g'(x)=2+\cos x>0, \forall x\in\mathbb{R}$ deci g este strcit crescătoare pe $\mathbb{R}$.
Deoarece $g(0)=0$, rezultă că $x=0$ este singura soluție a ecuației $g(x)=0$.

Asimptotele oblice.

Avem $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+\sin x}{x}\right)=2$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}(2x+\sin x-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=$ nu există.
Se obține că g nu are asimptote.

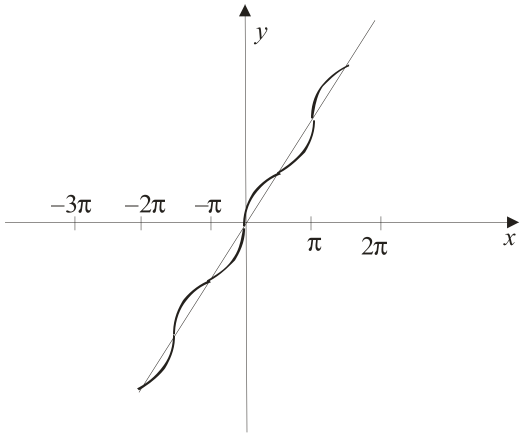
Studiul folosind derivatele

Funcția g este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi avem $g'(x)=2+\cos x$, $g''(x)=-\sin x, x\in\mathbb{R}$
Ecuația $g'(x)=0$ nu are soluții, iar ecuația $g''(x)=0$ are soluțiile $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Tabelul de variație

x	$-\infty$ -3 -2 $-$ 0 2 3 $+\infty$
$f'(x)$	$+ \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow \; \nearrow \; \nearrow \; \nearrow \; \nearrow \; \nearrow \; \nearrow \; +\infty$
$f''(x)$	$- \; - \; 0 \; + \; - \; 0 \; - \; - \; 0 \; + \; + \; 0 \; - \; - \; 0 \; + \; + \; 0 \; - \; - \; 0 \; + \; +$ $\frown \; i \smile i \; \frown \; i \smile i \; \frown \; i \smile i \; \frown \; i \smile$

Graficul



Graficul are o infinitate de puncte de inflexiune de coordonate $(k\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ şi este simetric în raport cu originea *O*.

S6. *Soluție*

Derivata funcției este $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2ax + b^2}{(x^2 + b^2)^2}, x \in \mathbb{R}$.

Panta tangentei în origine este $m = f'(0) = \dfrac{1}{b^2}$ şi trebuie să fie egală cu 1.

Se obține $b^2 = 1$. Tangenta are ecuația $y - f(0) = 1(x - 0)$ sau $y = x + f(0)$.

Rezultă că $f(0) = 0$. Se obține $\dfrac{a}{b^2} = 0$ deci $a = 0$.

Aşadar $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

S7. *Soluție*

a) Fie $x_0 \in D$ punctul de tangentă.

Tangenta în x_0 are ecuația $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ sau, altfel scrisă :

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Identificând cu ecuația dată $y = -2x + 10$ se obține sistemul $\begin{cases} f'(x_0) = 2 \\ f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 10 \end{cases}$.

Dar $f'(x) = \dfrac{ax^2 - 2ax - 2}{(x-1)^2}$.

Sistemul se scrie: $\begin{cases} ax_0^2 - 2ax_0 - 2 = -2(x_0 - 1)^2 \\ \dfrac{ax_0^2 + 2}{x_0 - 1} + 2x_0 = 10 \end{cases}$.

Din prima ecuația se obține că $x_0(x_0 - 1)(a + 2) = 0$. Avem cazurile:

- Pentru $x_0 = 0$ din a doua ecuație se obține că $-2 = 10$, fals.
- Pentru $x_0 = 2$ din a doua ecuație rezultă că $a = 1$.
- Pentru $a = -2$, din a doua ecuație rezultă că $x_0 = 1$, fals.

Aşadar $a = 1$ şi tangenta este dusă în punctul de abscisă $x_0 = 2$.

b) Funcția este $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$, etc.

Teste de evaluare

Testul 1

Soluții

1. *Soluție*

Funcția *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Se obține că $f'(x)=\dfrac{-x^2-2ax+1-a}{(x^2+x+1)^2}$. Din condiția $f'(1)=1$ rezultă că a = 0, deci $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$, iar $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Tabelul de monotonie

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$		0	$+\quad+$	0	$-\ -\ -\ -$	
$f(x)$	$\searrow\quad\searrow$		m	$\nearrow$	M	$\searrow\quad\searrow$	

2. *Soluție*

a) Condiția pusă: $x^2+4x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Rezultă că $\Delta=16-4m<0$, deci $m\in(4,+\infty)$.

b) Avem: $f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+m}$.

Deoarece $f'(-2)=0$ rezultă că $m\in(4,+\infty)$.

c) Avem: $f(x)=\ln(x^2+4xc+9),\ f'(x)=\dfrac{2(x+2)}{x^2+4x+9},\ x\in\pi$.

Tabelul de variație.

x	$-\infty$	-2		$+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	$\searrow\quad\searrow\quad\searrow$	m	$\nearrow\quad\nearrow$	

Punctul de minim $x=-2$.

3. *Soluție*

Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Avem: $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{1-2x}{1+x^2},\ f''(x)=\dfrac{2(x^2-x-1)}{(x^2+1)^2}$.

Tabelul de convexitate

x	$-\infty$	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$+\ +\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$	$\smile$	i	$\frown$	i	$\smile$	

Testul 2

1. *Soluție*

Avem $f'(x)=5x^4,\ x\in\mathbb{R}$.

Semnul derivatei

x	$-\infty$					0					$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$			$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		

Punctul $x=0$ nu este de extrem.

2. *Soluție*

a) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\[2mm] \dfrac{2}{x^2+1}, & x\in(-1,1)\end{cases}$.

Funcția nu este derivabilă în $x\in\{-1,1\}$.

b) *Semnul derivatei*

x	$-\infty$				-1			1			$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$ | $-$	|	$+$	$+$	|	$-$	$-$ | $-$	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$		m	$\nearrow$		M	$\searrow$	$\searrow$	

c) Semitangentele în $x=1$, au pantele $m_1=f_s'(1)=1,\ m_2=f_d'(1)=1$, deci $m_1\cdot m_2=-1$.

3. *Soluție*

Avem $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Se pune condiția $f'(x_0)=-1$.

Se obține ecuația $x_0^2+2x_0+(x_0+1)^2=0$ sau $2x_0^2+4x_0+1=0$ cu soluțiile $x_0\in\left\{\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Testul 3.

1. *Soluție*

a) Punem condiția $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$.

Rezultă egalitatea $4+a=2a+b$, deci $a+b=4$. Putem lua $a=\alpha\in\mathbb{R}$ şi $b=4-\alpha$.

b) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Studiem derivabilitatea în $x_0=2$.

Avem $f_s'(2)=4$, $f_d'(2)=a$, deci $a=4$.

Din continuitate se obține $b=0$.

c) Avem $5=f(1)=1+a$ deci $a=4$.

De asemenea $4+b=f'(3)=a=4$ deci $b=0$.

Rezultă că funcția f este $f(x)=\begin{cases} x^2+4, x\leqslant 2 \\ 2x, x>2 \end{cases}$.

2. *Soluție*

a) Funcția f este derivabilă pe $[0,+\infty)$.

Avem $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$.

b) *Tabelul de monotonie*

x	$-\infty$										$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$		

c) Din monotonia funcției f se obține că $x=0$ este punct de minim. Atunci vom avea că $f(x)\geqslant f(0)=0, \forall x\in[0,+\infty)$ deci $\ln(1+x)\geqslant\dfrac{2x}{x+2}, \forall x\in[0,+\infty)$.

3. *Soluție*

a) $D_1=[2,+\infty), D_2=\mathbb{R}$

b) Funcția f este derivabilă pe $(2,+\infty)$ şi $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$, iar

g este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $g'(x)=(x^2+3x-5)e^x$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{(x^2+x-6)e^x}{\sqrt{x-2}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{(x^2+3x-5)e^x}{\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(2\sqrt{x-2}\cdot(x^2+3x-5)e^x)=0$.

Testul 4

a) Funcția *f* este de două ori derivabilă pe $[0,+\infty)$ şi

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-1+x^2=\frac{x^4}{x^2+1}\quad f''(x)=\frac{2x^5+4x^3}{(x^2+1)^2},\ x\geqslant 0.$$

b) *Tabelul de monotonie*

x	0										$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
$f(x)$	0	↗	↗	↗		↗	↗	↗			$+\infty$

c) Din tabelul de monotonie se obține că $x = 0$ este punct de minim pentru *f*.

Aşadar $f(x)\geqslant f(0)=0, \forall x\in[0,+\infty)$ sau $arctgx\geqslant x-\frac{x^3}{3}$.

3. Tangenta în M are ecuația $y - f(a)=f'(a)(x-a)$ sau

$$y=\frac{1-a}{a^2}+\frac{a^2-2a}{a^4}(x-a)=\frac{a-2}{a^3}x+\frac{3-2a}{a^2}.$$

Punctele de intersecție ale graficului cu tangenta sunt date de sistemul

$$\begin{cases} y=\dfrac{1-x}{x^2} \\ y-\dfrac{1-a}{a^2}=\dfrac{a-2}{a^3}(x-a) \end{cases}$$

A doua ecuație, după substituția lui *y*, se scrie:

$$\frac{1-x}{x^2}-\frac{1-a}{a^2}=\frac{a-2}{a^3}(x-a) \text{ sau } \frac{(x-a)(ax-x-a)}{x^2a^2}=\frac{a-2}{a^3}(x-a).$$

Se obține $x - a = 0$ cu soluția $x = a$ şi ecuația de gradul 2, $a(ax-x-a)=(a-2)x^2$ cu soluțiile $x\in\left\{a,\frac{a}{a-2}\right\}$.

Rezultă că $N\left(\frac{a}{a-2}, f\left(\frac{a}{a-2}\right)\right)$.

Se pune condiția ca $f'\left(\frac{a}{a-2}\right)=3$.

Notăm $u=\frac{a}{a-2}$ şi se obține ecuația $\frac{u-2}{u^3}=3$ sau $3u^3-u+2=0$ care se scrie $(u+1)(3u^2-3u+2)=0$ cu soluția $u=-1$.

Aşadar $\frac{a}{a-2}=-1$ şi $a = 1$.

Probleme recapitulative

Soluții

1. Vom aplica regula lui l'Hospital.

a) $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{20x^{19}-20x^{9}}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{20\cdot 19x^{18}-20\cdot 9\cdot x^{8}}{2}=10\cdot 19-10\cdot 9=100$;

b) $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

c) $\ell=\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\cos x+2\cos x+...+n\cos nx}{\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}+...+\dfrac{n}{\cos^2 nx}}=\dfrac{1+2+...+n}{1+2+...+n}=1$;

d) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-(8x)^2}}}{2\cos 2x}=4$;

e) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x+2\sin 2x\cdot\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x+4\cos 2x\cos x-2\sin 2x\sin x}{2}=$

$=\dfrac{5}{2}$.

f) $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3+4^x\ln 4}{5^x\ln 5+6^x\ln 6}=\dfrac{\ln 2+\ln 3+\ln 4}{\ln 5+\ln 6}$.

2. Din proprietatea părții întregi se obține că

$x+\sqrt{x}+\ln^2 x-1<\left[x+\sqrt{x}+\ln^2 x\right]\leqslant x+\sqrt{x}+\ln^2 x$ şi astfel

$\dfrac{x+\sqrt{x}+\ln^2 x-1}{3x+1}<\dfrac{[x+\sqrt{x}+\ln^2 x]}{3x+1}\leqslant\dfrac{x+\sqrt{x}+\ln^2 x}{3x+1}$.

Din criteriul cleşte se obține că $\ell=\dfrac{1}{3}$.

3. $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1-a^2x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax}-b\right)=-b+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+ax}$.

Se pune condiția ca $1-a^2=0$. Se obține $a=1$, $a=-1$.

Valoarea $a=-1$ nu este convenabilă deoarece se obține că $\ell=+\infty$.

Pentru $a=1$ se obține $\ell=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}-b=-\dfrac{1}{2}-b$.

Din $-\dfrac{1}{2}-b=1$ se obține $b=-\dfrac{3}{2}$.

4. Avem $\ell=\dfrac{a+b+c}{0_+}$. Se pune condiția ca $a+b+c=0$, astfel limita ar fi infinită.

Rezultă $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-a\sin x-2b\sin 2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-a\cos x-4b\cos 2x}{12x^2}=\dfrac{-a-4b}{0_+}$.

Se pune condiția ca $-a-4b=0$.

Rezultă că $\ell=\lim_{l\to 0}\frac{a\sin x+8b\sin 2x}{24x}=\lim_{l\to 0}\frac{a\cos x+2b\cos 2x}{24}=\frac{a+16b}{24}=1$.

Se obține sistemul $\begin{cases}a+b+c=0\\a+4b=0\\a+16b=24\end{cases}$ cu soluția $a=-8$, $b=2$, $c=6$.

5. Se studiază continuitatea în punctele de legătură în rest funcțiile fiind continue.

a) $f(1-0)=2$, $f(1+0)=a-1$.

Funcția este continuă în $x_0=1$ dacă $a=3$.

b) Funcția este continuă pentru $a=0$.

c) Se obține că f este continuă dacă $\begin{cases}1+a+b=a+2\\4+a=10-2a\end{cases}$ deci $a=2$, $b=1$.

6. Funcția este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. În $x=0$ este continuă dacă $a+1=\frac{1}{4}$, $b=4$.

7. Condițiile de continuitate şi derivabilitate în $x_0=0$ conduc la $b=c=1$, $a\in\mathbb{R}$.

8. Se obține că $a=b$ şi $2a=-2$, deci $a=b=-1$.

10. a) Din continuitate se obține că $c=-1$. Avem:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax-3,\ x\in[-1,0)\\2x+b,\ x\in[0,1]\end{cases}.$$

Funcția este derivabilă dacă $b=-3$.
Egalitatea $f(-1)=f(1)$ implică $a+4=1+b-c$.
Se obține că $a=-5$, $b=-3$, $c=-1$.

b) Funcția g este continuă fiind obținută prin compunerea a două funcții continue f şi g,

$$g(x)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

11. Obținem $F'(x)=\left(b+\frac{c+a\ln(x+1)}{x}\right)'=\frac{\frac{ax}{x+1}-[c+a\ln(x-1)]}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}$.

Aşadar trebuie cu $a=1$ şi $c=0$.

Se obține că $F(x)=\frac{bx+\ln(x+1)}{x}$.

Deoatece $\lim_{x\to 0}F(x)=b+1$, se obține că $b=0$.

Astfel $\alpha=F(2)=\frac{\ln(3)}{2}=\ln\sqrt{3}$.

12. Condiția ca f să fie continuă pe $\mathbb{R}$ este ca $2-\sqrt{m^2+m+1}=|m|$.

Obținem că $\sqrt{m^2+m+1}=2-|m|\geqslant 0$.

Prin ridicare la pătrat avem ecuația $m^2+m+1=4-4|m|+m^2$ sau $m + 4|m| = 3$ cu soluția $m=\frac{3}{5}$ şi $m=-1$.

Se obține că $\alpha=\frac{9}{25}+1=\frac{34}{25}$.

13. Funcția f are perioada $T = 2$ dacă $f(x+2)=f(x), \forall x\in \mathbb{R}$.
Avem:

$$f(x+2)=(-1)^{[x+2]}\left(x+a\left[\frac{x+2}{2}\right]+b\right)+3=(-1)^{[x]+2}\left(x+a\left[\frac{x}{2}+1\right]+b\right)+3=$$
$$=(-1)^{[x]}\left(x+a\left[\frac{x}{2}\right]+b+a\right)+3=(-1)^{[x]}\left(x+a\left[\frac{x}{2}\right]+b\right)+3+(-1)^{[x]}a=$$
$$=f(x)+(-1)^{[x]}a$$

deci $a = 0$.

Rezultă că $f(x)=(-1)^{[x]}(x+b)+3$.

Avem: $f(1-0)=(-1)^0(1+b)+3=b+4$, iar $f(1+b)=(-1)[1+b]+3$ şi se obține că:

$$b+4=-1-b+3 \text{ deci } b=-1.$$

Aşadar $S = 0 - 1 = - 1$.
Răspuns corect b).

14. *Continuitatea funcției în $x_0 = 1$*
- $f(1-0)=p, f(1)=m, f(1+0)=1+q$ deci $p=m=1+q$.

Derivabilitatea funcției în $x_0 = 1$
- $f_s'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{p^x-p}{x-1}$, $f_d'(1)=3$, deci $p = 3 = m$ şi $q = 2$.

Se obține $S = m + p + q = 8$.
Răspuns corect e).

15. a) $x = 1$ este asimptotă verticală.
Asimptote oblice
- $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3(x-2)}{x^2-x}=1$, iar

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+6}{x-1}=-2.$$

Aşadar dreapta $y = x - 2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.
- $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3(x-2)}{x^2-x}=1$, iar

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-6}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-6}{x-1}=4.$$

Aşadar dreapta $y = x - 4$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

b) *Asimptote orizontale*
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$

Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Asimptotă oblică spre $+\infty$

• $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = 2$ iar

$n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$.

Dreapta $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

c) $D = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Asimptote verticale

• Dreptele $x = 0$, $x = 1$ sunt asimptote verticale.

Asimptote oblice

• $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3(x-2)}{x^2(x-1)} = 1$ iar

$n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-3x+6}{x^2-x}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+6}{x^2-x} = 1$.

Dreapta $y = x + 1$ este *asimptotă oblică* spre $+\infty$.

• $m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3(x-2)}{x^2(x-1)} = 1$, iar

$n = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+3x-6}{x^2-x}-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-6}{x^2-x} = 1$

Dreapta $y = x + 1$ este *asimptotă oblică* spre $-\infty$.

16. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{6x-x^2+4\ln x-2}{2x} = \dfrac{0-\infty-2}{0_+} = -\infty\dfrac{1}{0_+} = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+bx+4\ln x-2}{2x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-2x+6+\dfrac{4}{x}}{2}\right) = -\infty$;

b) $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+6x+4\ln x-2}{2x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x+6+\dfrac{4}{x}}{4x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+6x+4}{4x^2} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ iar

$n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x^2+6x+4\ln x-2}{2x}+\dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+4\ln x-2}{2x} = 3$

Asimptota oblică este $y = -\dfrac{x}{2}+3$.

c) Panta tangentei trebuie să fie $m = -\dfrac{1}{2}$.

Se obține egalitatea $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2}$.

Avem că $f'(x) = \dfrac{\left(6-2x+\dfrac{4}{x}\right)2x-2(6x-x^2+4\ln x-2)}{4x^2} = \dfrac{-2x^2-8\ln x+12}{4x^2}$.

Din egalitatea $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2}$ rezultă ecuația logaritmică $8\ln x-12=0$ cu soluția $x = e^{\frac{3}{2}}$.

17. Avem: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}-1-\frac{4\ln x}{x^2}\right)=-1$, iar

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(2-x-\frac{4\ln x}{x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{4\ln x}{x}\right)=2.$$

Asimptota oblică spre $+\infty$ este $y=-x+2$.

Tangenta are panta $f'(x_0)$ şi se obţine egalitatea $f'(x_0)=-1$.

Dar $f'(x)=-1-4\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Ecuaţia $f'(x_0)=-1$ se scrie $-4\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}=0$ deci $x_0=e$.

Punctul de tangenţă este $M\left(e,2-e-\frac{4}{e}\right)$.

18. a) Avem $3=n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+ax+b}{x+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a-2)x+b}{x+1}=a-2$, deci $a=5$.

Aşadar $a=5, b\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)=\frac{2x^2+5x+b}{x+1}, D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Funcţia poate avea dreapta $x=-1$ asimptotă verticală dacă $2-5+b\neq 0$, deci dacă $b\neq 3$.

19. Avem: $f'(x)=\frac{2x+m-2}{3\sqrt[3]{(x^2+(m-2)x+2-m)^2}}$.

$f'(x)$ are sens pe $\mathbb{R}$ dacă $x^2+(m-2)x+2-m\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Rezultă că $\Delta=(m-2)^2-4(2-m)<0$ şi se obţine că $m\in(-2,2)$.

20. a) Se obţine $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2(1+ax)}{1-x^2}e^{2x}\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}(1+ax)e^{2x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+ax}{e^{-2x}}=0$.

b) $f'(x)=\frac{ax^2+2x+a}{(1-x^2)^2}+\frac{1+ax}{1-x^2}\cdot 2e^{2x}, x\in D$.

Se obţine că $f'(0)=a+2, f(0)=1$ şi egalitatea $3(a+2)-1=11$ cu soluţia $a=2$.

21. Se obţine

$$f'(x)=\frac{[33(x+2)^{32}+33(x-2)^{32}][(x+2)^{33}-(x-2)^{33}]-[(x+2)^{33}+(x-2)^{33}][33(x+2)^{33}-33(x-2)^{32}]}{[(x+2)^{33}-(x-2)^{33}]^2}$$

Rezultă că $f'(0)=\frac{33}{2}$, $f'(2)=0, f'(-2)=0$.

Aşadar $T=\frac{33}{2}$.

22. Din continuitatea în $x_0 = 0$ se obține că $c = \ln 1 = 0$.
Din derivabilitatea funcției în $x_0 = 0$ se obține că $-1 = b$, iar derivata este:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x \leqslant 0 \\ 2ax - 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Rezultă că $f_d''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2ax-1+1}{x} = 2a$ și $f_s''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x-1}+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{(x-1)x} = -1$

Aşadar $2a = -1$ și $a = -\dfrac{1}{2}$.

23. Continuitatea în $x = 1$ implică $1 + a + b + c = 0$.
Din derivabilitatea funcției f în $x_0 = 1$ avem $f_s'(1) = f_d'(1)$.

Dar $f_s'(1) = 3 + 2a + b$, iar $f_d'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{arctg(x-1)}{x-1} = 1$.

Aşadar $2a + b = -2$.

Derivata funcției f se scrie: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax - 2 - 2a, & x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}, & x > 1 \end{cases}$.

Se obține că

$$f_s''(1) = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2ax - 2 - 2a - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x^2-1) + 2a(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 3(x+1) + 2a = 6 + 2a.$$

De asemenea $f_d''(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x^2-2x+2} - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)^2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)}{x^2-2x+2} = 0$.

Aşadar $6 + 2a = 0$ și $a = -3$, apoi $b = 4$ și $c = -2$.

24. a) Avem $f_s'(\pi) = \lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \dfrac{|x-\pi| \sin x}{x-\pi} = \lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \dfrac{-(x-\pi)\sin x}{x-\pi} = -\sin\pi = 0$.

$$f_d'(\pi) = \lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} \frac{(x-\pi)\sin x}{x-\pi} = \sin\pi = 0.$$

Aşadar $f'(\pi) = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} (x-\pi)\sin x, & x \geqslant \pi \\ (\pi - x)\sin x, & x < \pi \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} \sin x + (x-\pi)\cos x, & x \geqslant \pi \\ -\sin x + (\pi - x)\cos\pi, & x < \pi \end{cases}$.

Se obține:

$$f_d''(\pi) = \lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} \frac{\sin x + (x-\pi)\cos x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \cos x + \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = -1 + \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{1} = -1 - 1 = -2.$$

$$f_s''(\pi) = \lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \frac{-\sin x - (x-\pi)\cos x}{x-\pi} = +2.$$

Aşadata f nu este de două ori derivabilă în $x = \pi$.

25. a) Funcția *f* este sumă de funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, $(h(x)=4^x,\ g(x)=2^x+1)$, deci este funcție strict crescătoare și injectivă.
Funcția *f* este continuă, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0+0+1=1$.

Din proprietatea lui Darboux se obține că mulțimea valorilor funcției *f* este $\operatorname{Im} f=(1,+\infty)$, deci *f* este surjectivă.
În concluzie *f* este bijectivă și inversabilă.

b) Fie $f(x)=y$ deci $4^x+2^x+1=y$.

Cu notația $t=2^x>0$ se obține ecuația de gradul 2 în *t*:

$$t^2+t+1-y=0 \text{ cu soluție acceptabilă } t=\frac{-1+\sqrt{4y-3}}{2}.$$

Rezultă că $2^x=t$.

Așadar $f^{-1}:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}$.

Avem $(f^{-1})'(3)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ unde $f(x_0)=3$.

Din egalitatea $4^{x_0}+2^{x_0}+1=3\Rightarrow x_0=0$.

Astfel, $(f^{-1})'(3)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{\ln 4+\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 8}$.

26. a) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$, deci $a=c=\dfrac{1}{2}, b=-1$.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}\right]$;

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{x^3}-\frac{4}{(x+1)^3}+\frac{2}{(x+2)^3}\right]=\frac{1}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}.$$

$$S=\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{10^3}\right)-2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{11^3}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{12^3}\right)=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{12^3}.$$

27. $$\ell=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3\,\frac{\operatorname{tg}x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

28. $$\ell=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=e^0\cdot\ln e=1.$$

29. Pentru $n = 0$, $l = 0$.

• Pentru $n \geqslant 1$ este caz de nedeterminare $\frac{e}{0}$.

Aplicăm regula lui L'Hospital. $\ell = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x \sin x}{nx^{n-1}}$.

• Pentru $n = 1$, $\ell = 0$,

pentru $n = 2$, $\ell = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$.

• Pentru $n \geqslant 3$ avem: $\ell = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\sin x}{nx^{n-2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\cos x}{n(n-2)x^{n-3}}$.

• Pentru $n = 3$, $\ell = \frac{-1}{3}$, iar

pentru $n \geqslant 4$, $\ell = \frac{-1}{0_{\pm}}$ deci nu se mai obține limită finită.

Aşadar $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ şi $m = 6$.

30. Notăm $\sqrt{x+1} = t \Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1$.

Rezultă $E(t) = \sqrt{t^2 + 4 - 4t} + \sqrt{9 + t^2 - 6t} = |t-2| + |t-3| \Rightarrow f(x) = |\sqrt{x+1} - 2| + |\sqrt{x+1} - 3| =$

$$= \begin{cases} 5 - 2\sqrt{x+1}, & x \in (-1, 3] \\ 1, & x \in (3, 8) \\ 2\sqrt{x+1} - 9, & x \in [8, +\infty) \end{cases}.$$

Avem $f_s'(3) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \frac{5 - 2\sqrt{x+1} - 1}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \frac{2(2 - \sqrt{x+1})}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{2(3-x)}{(x-3)(2+\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{2}$, iar

$f_d'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{1-1}{x-3} = 0$, deci f nu este derivabilă în $x_0 = 3$.

Analog rezultă că f nu este derivabilă în $x_0 = 8$.

Avem: $f_s'(3) = -\frac{1}{2}$, $f_d'(3) = 0$, $f_s'(8) = 0$, $f_d'(8) = \frac{1}{3}$.

Se obține $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$.

31. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{4(e^x - x - 1) - x^3 + (a-3)x^2}}{x} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 0} \frac{4(e^x - x - 1) - x^3 + (a-3)x^2}{x^3}}$.

Limita de sus radical o calculăm folosind regula lui L'Hospital. Avem:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{4(e^x - 1) - 3x^2 + 2(a-3)x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4e^x - 6x + 2(a-3)}{6x} = \frac{4 - 2(a-3)}{0_{\pm}}.$$

Se pune condiția $4 = 2(a-3)$ deci $a = 5$.

Rezultă că $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4e^x - 6}{6} = -\frac{1}{3}$.

32. Funcția este derivabilă dacă $a = b \in \{-1, 1\}$. Se obține $S = 4$.

33. Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă $a = 2e$, $b = -e$.

Rezultă $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x \leqslant 1 \\ 2ex-e, & x>1 \end{cases}$.

$$f'(x)=\begin{cases} (x+1)e^x, & x \leqslant 1 \\ 2e, & x>1 \end{cases} \text{ şi astfel, } A = 2e\cdot 10 = 20e.$$

34. $l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2n}-2x^n-n}{(x-1)^2}=\dfrac{-1-a}{0_+}$ deci este necesar ca $a = -1$.

Avem $l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2nx^{2n-1}-2nx^{n-1}}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2n(2n-1)x^{2n-2}-2n(n-1)x^{n-2}}{2}=$

$$=\frac{2n(2n-1)-2n(n-1)}{2}=n^2.$$

35. $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^5)-x^5}{x^6}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-\ln^5(1+x)}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{5x^4}{1+x^5}-5x^4}{6x^5}+$

$$+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\cdot\frac{x^4+x^3\ln(x+1)+\ldots+\ln^4(x+1)}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x^5}{(1+x^5)6x}\cdot 5+$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\ln(x+1)}{x}+\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)^2+\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)^3+\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)^4\right]=$$

$$=0+5\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{x+1}}{2x}=5\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(x+1)}=\frac{5}{2}.$$

36. Caz de nedeterminare $\dfrac{\infty}{\infty}$. Se obține cu regula lui l'Hospital

$$\ell=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x+e^x}{x^2+e^x}}{\dfrac{3x^2+2e^{2x}}{x^4+e^{2x}}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+2x}{e^x+x^2}\right)\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+3x^4}{2e^{2x}+3x^2}=\frac{1}{2}.$$

37. a) Avem $1=m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$, deci $a = 1$.

Apoi $2=n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+bx+2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx+x+2}{x-1}=b+1$, deci $b = 1$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

c) Asimptotele sunt $y = x + 2$, şi $x = 1$.

Triunghiul are vârfurile $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 3)$, iar $S=\dfrac{9}{2}$.

39. Avem: $f'(x)=e^{-x}[-x^2+x(2-m)+m], x\in\mathbb{R}$.
Se obține $\Delta=(2-m)^2+4m=m^2+4>0, \forall m\in\mathbb{R}$.
Aşadar ecuația $f'(x)=0$ are două soluții distincte, iar din semnul funcției f' se deduce că are două puncte de extrem.

40. a) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+\sqrt{bx^2+cx+1}}{x}\right)=a+\sqrt{b}=4$.
Pentru asimptota orizontală la $-\infty$ se obține că:

$$-1=\lim_{x\to-\infty}(ax+\sqrt{bx^2+cx+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(b-a^2)+cx+1}{\sqrt{bx^2+cx+1}-ax}$$

Se pune condiția $b-a^2=0$ și rezultă că:

$$-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{cx+1}{\sqrt{bx^2+cx+1}-ax}=\frac{c}{-a-\sqrt{b}}=\frac{-c}{4} \text{ deci } c=4.$$

Din sistemul $\begin{cases}a+\sqrt{b}=4\\ a=b^2\end{cases}$ se obține $a=2$, $b=4$.

b) Funcția f este $f(x)=2x+|2x+1|=\begin{cases}4x+1, & x\geqslant-\frac{1}{2}\\ -1, & x<-\frac{1}{2}\end{cases}$.

41. Funcția este derivabilă pe D și se obține că $f'(x)=\dfrac{bx^2+4x+2a}{(bx+2)^2}$.

Condiția $f'(-8)=0$, $f'(4)=0$ conduce la sistemul $\begin{cases}2a+64b=32\\ 2a+16b=-16\end{cases}$, cu soluția

$b=1$, $a=-16$, deci $f(x)=\dfrac{x^2-16}{2(x+1)}$, $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$.

42. a) Cele două asimptote trebuie să fie asimptote verticale. Se pune condiția ca ecuația $x^2+x+m=0$ să admită două soluții reale diferite. Rezultă că $\Delta=1-4m>0$ deci $m<\dfrac{1}{4}$.

b) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2+x+1}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Graficul intersectează axele în $A(0, 1)$ şi $B(-1, 0)$.

Asimptote oblice.

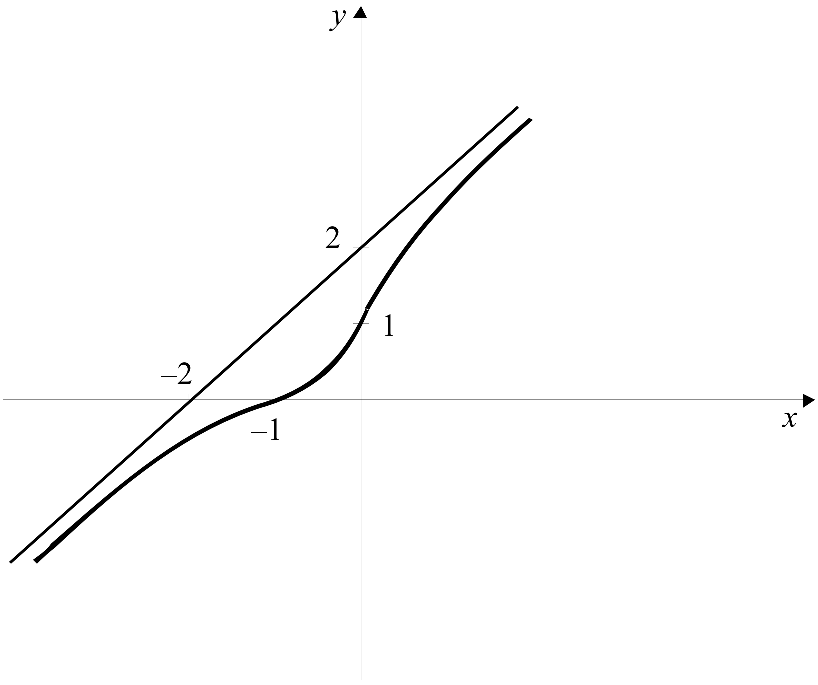
- $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x+1)^3}{x(x^2+x+1)}=1$, $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{(x+1)^3}{x^2+x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+x+1}=2$ deci dreapta $y=x+2$ este asimptotă oblică la $\pm\infty$.

Studiul folosind derivatele

- $f'(x)=\dfrac{(x^2+2)(x+1)^2}{(x^2+x+1)^2}, x\in\mathbb{R}$; $f''(x)=\dfrac{-6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}, x\in\mathbb{R}$.

Tabelul de variație

x	$-\infty \qquad -1 \qquad 0 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+ \quad + \quad + \; 0 \; + \quad + \quad + \quad + \quad +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow +\infty$
$f''(x)$	$- \quad - \quad - \quad 0 \; + \quad + \; + \; 0 - \quad -$ $\frown \quad i \quad \smile \quad i \quad \frown$



Graficul este tangent axei Ox în $x = -1$